# TÍNH CHẤT ĐẠI SỐ CỦA TOÁN TỬ TÍCH PHÂN KỲ DỊ CAUCHY SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG CỦA CHÚNG ĐỂ GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TƯƠNG ỨNG

PTS NGUYỄN VĂN MẬU

Trong bài này, dưới quan điểm hội tụ của tích phân theo giá trị chính Cauchy sẽ mô tả một số đặc trưng mới của toán tử kỳ dị dạng:

$$(k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{Q_{n-1}(\tau, t)}{\tau^n - t^n}\,\varphi(\tau)d\tau \tag{1}$$

trong đó $Q_{n-1}(\tau, t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1} t^{n-k}$ (2)

là đa thức thuần nhất bậc $n-1$; $\alpha_k \in C$. Tiếp theo ta xây dựng các toán tử chính quy hai phía và giải đúng một lớp phương trình tích phân kỳ dị dạng đặc trưng trong trường hợp tổng quát.

**1. Trước hết ta khảo sát toán tử dạng**

$$(S_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{t^{n-1}}{\tau^n - t^n}\,\varphi(\tau)d\tau,\ n > 1 \tag{3}$$

(trường hợp $n = 1$ ta nhận được toán tử kỳ dị Cauchy).

Ký hiệu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ là các nghiệm đôi một khác nhau của phương trình $\zeta^n = 1$; $\varepsilon_1 = \exp^{2\pi i}/_n$; $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

Khi đó $\omega(\tau, t) := \tau^n - t^n = \prod\limits_{k=1}^{n} (\tau - \varepsilon_k t)$

và $\dfrac{t^{n-1}}{\tau^n - t^n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\omega'(\varepsilon_k)}\,\dfrac{1}{\tau - \varepsilon_k t}$; $\omega'(\varepsilon_k) := \omega'(\tau, 1)\,|_{\tau = \varepsilon_k}$

Nhận xét rằng $(W_k\varphi)(t) = (W^k\varphi)(t)$, trong đó $(W\varphi)(t) = \varphi(\varepsilon_1 t)$

Vì vậy (3°) có dạng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(\varepsilon_k)} SW^k. \tag{3°}$$

trong đó $W$ là toán tử đối hợp bậc $n$ ($W^n = I$)

*Bổ đề 1*: Với mỗi cặp số tự nhiên $(n, m)$ ta đều có $[S_n, S_m] := = S_nS_m - S_mS_n = 0$.

Gọi $P_1, P_2, \dots, P_n$ là các toán tử chiếu sinh bởi $W$ tương ứng với các nghiệm $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ (xem [1, 4]), khi đó

$$W = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j P_j ;\ P_iP_j = \delta_{ij}P_j ;\ I = \sum_{j=1}^{n} P_j \tag{4}$$

*Bổ đề 2*: Mọi toán tử dạng (3") đều có thể viết dưới dạng $S_n = SP_{n-1}$.

Thật vậy, sử dụng (4), ta viết (3") như sau:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(\varepsilon_k)} S \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^k P_j = S \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_j^k}{\omega'(\varepsilon_k)} P_j$$

Từ đó suy ra đpcm.

*Định lý 1*: Toán tử $S_n$ $(n > 1)$ là toán tử đại số với đa thức tối tiểu $P_{S_n}(t) = t^3 - t$.

*Chứng minh.*

Ta có $S_n^3 = S_n(SP_{n-1})(SP_{n-1}) = S_nP_{n-1}S^2P_{n-1} = S_nP_{n-1}^2 = S_n$.

Dễ dàng kiểm tra rằng $t^3 - t$ là đa thức tối tiểu của $S_n$.

*Định lý 2*: Đặt $Q(t) = -\frac{3}{2}t^2 - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1$ (5)

Khi đó $\widehat{S_n} := Q(S_n)$ là toán tử đối hợp bậc 3 và $\widehat{S_n}^{-1} = \widehat{S}_n^2$

*Chứng minh*: Dễ dàng kiểm tra rằng $Q(S_n)$ là toán tử đại số có các nghiệm đặc trưng 1, $\exp(\pm 2\pi i/3)$. Từ đây ta suy ra đpcm [5].

2. Bây giờ ta chuyển sang xét toán tử dạng tổng quát (1).

Giả sử $n$ = fixed, ký hiệu

$$(M_k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau^{k-1}t^{n-k}}{\tau^n - t^n} \varphi(\tau)d\tau.$$

Bằng tính toán tương tự, dễ dàng chứng minh

*Bổ đề 3*: $M_k = S.P_{n-k}$.

Từ đó suy ra

*Định lý 3*: 1) Mọi toán tử (1) đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$K = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j SP_{n-j} \tag{6}$$

2) Toán tử $K$ khả nghịch khi và chỉ khi $\alpha_j \neq 0$ với mọi $j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$

3) Toán tử nghịch đảo (hai phía) của $K$ được tính theo công thức

$$R = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{-1} SP_{n-j} \tag{7}$$

*Hệ quả 1.* Mọi toán tử dạng (1) đều là toán tử đại số.

Thật vậy, từ — (6) suy ra K là tích của hai toán tử đại số giao hoán nên theo [7] nó cũng là một toán tử đại số. Trường hợp riêng, khi các hệ số $\alpha_j$ là nghiệm của các phương trình $\zeta^{n_j} = 1$. thì sẽ có $K^m = K$ trong đó $m = 1 + 2$. BCNN $(n_1, n_2, \ldots, n_n)$

*Hệ quả 2:* Phương trình $K\varphi = f$ giải được khi và chỉ khi $P_{n-j} f = 0$ ứng với các chỉ số j mà $\alpha_j = 0$. Nếu các điều kiện này được thỏa mãn thì nghiệm tổng quát của (7) được tính theo công thức

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \beta_j S P_{n-j} f \tag{8}$$

$$\text{trong đó } = \beta_j \begin{cases} \alpha_j^{-1} & \text{khi } \alpha_j \neq 0 \\ \text{tùy ý, khi } \alpha_j = 0 \end{cases}$$

*Định lý 4.* Toán tử K là toán tử giới nội $(L_p(\Gamma) \to L_p(\Gamma))$ hoặc $(H_\mu(\Gamma) \to H_\mu(\Gamma))$ $(p > 1,\ 0 < \mu < 1)$, hoặc $(H_1(\Gamma) \to H_{1-\varepsilon}(\Gamma))$ với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ; $\Gamma = \{t, |t| = 1\}$.

Chứng minh được suy ra từ các tính chất của toán tử kỳ dị Cauchy [1, 2] và tính bất biến của $L_p(\Gamma)$, $H_\mu(\Gamma)$ đối với toán tử W.

*Định lý 5:* 1) Toán tử $M_j$ là toán tử khả nghịch trong $L_p^0(\Gamma)$, $H_\mu^0(\Gamma)$ trong đó $L_p^0(\Gamma)$ và $H_\mu^0(\Gamma)$ là không gian các hàm thuộc $L_p(\Gamma)$, $H_\mu(\Gamma)$ tương ứng và bất biến đối với phép quay $\zeta = (\exp 2\pi i/n) Z$.

2) $[K, aI]$ là toán tử hoàn toàn liên tục trong $L_p^0(\Gamma)$ và $H_\mu^0(\Gamma)$

Thật vậy, từ giả thiết ta dễ dàng suy ra $M_j$ là các toán tử đối hợp, kết hợp với tính chất của toán tử kỳ dị Cauchy [2] ta thu được dpcm.

3. **Vấn đề chính quy hóa.** Trong mục này, ta xét bài toán chính quy hóa toán tử

$$M = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) K^j \tag{9}$$

trong không gian $H_\mu(\Gamma)$, trong đó K có dạng (1).

Đặt

$$Q_1 = \frac{1}{2}(I + S); \quad Q_2 = \frac{1}{2}(I - S)$$

$$b_i(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, \alpha_i^j \ ; \ c_i(t) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j a_j(t)\, \alpha_i^j$$

Khi đó sẽ có:

*Định lý 6:* Nếu $a_j(t) \in H_\mu^0(\Gamma)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ và $b_i(t)$, $c_i(t)$ là các hàm số không triệt tiêu trên $\Gamma$ thì M là toán tử Noether và toán tử chính quy R của nó được tính theo công thức:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (b_i^{-1} Q_1 + C_i^{-1} Q_2) P_{n-i}$$

Trong trường hợp tổng quát khi các hệ số $a_j(t)$ không thuộc vành $H^0_\mu(\Gamma)$ thì tiêu chuẩn Noether, công thức chỉ số và biểu thức toán tử chính quy được tính theo simbôn của nó [6,7]:

**4. Phương trình đặc trưng.**

Tương tự như trường hợp $n = 1$, ta xét phương trình

$$a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,(S_n\varphi)(t) = f(t) \tag{10}$$

trong không gian $H_\mu(\Gamma)$

Trước tiên ta giả thiết $b(t) \neq 0,\ t \in \Gamma$ và đặt $c(t) = a(t)\,/\,b(t)$. Khi đó có thể viết (10) dưới dạng

$$c(t)\,I\varphi + SP_{n-1}\,\varphi = f \tag{10'}$$

Để ý rằng

$$P_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(\varepsilon_k)}\,W^k \quad \text{(xem bổ đề 2) nên}$$

$$(P_{n-1}c)(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega'(\varepsilon_k)}\,W^k c(t) = \sum_{k=1}^{n} c(\varepsilon_k t)\,[\omega'(\varepsilon_k)]^{-1}\,W^k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} c(\varepsilon_k t)\,[\omega'(\varepsilon_k)]^{-1} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_k^j\,P_j = \sum_{j=1}^{n} C_j\,P_j$$

trong đó $c_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^j\,c(\varepsilon_k t)\,[\omega'(\varepsilon_k)]^{-1}$

Tương tự $P_{n-1} = \prod_{i \neq n-j} \dfrac{W - \varepsilon_i I}{\varepsilon_{n-j} - \varepsilon_i} = [\omega'(\varepsilon_{n-j})]^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_{k,j}\,W^k$

trong đó $\sigma_{kj}$ là đa thức đối xứng bậc k theo các biến $\varepsilon_i$ $(i \neq n-j)$

và $$(P_{n-j}c)(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,n-j}\,P_{n-j}$$

trong đó $$c_{k,n-j} = \sum_{v=1}^{n} \sigma_{v,j}\,.\,\varepsilon_v^k\,.\,c(\varepsilon_v t)\,.\,[\omega'(\varepsilon_{n-j})]^{-1} \tag{12}$$

Từ (4) suy ra $H_\mu(\Gamma) = \bigoplus_{i=1}^{n} H^i_\mu(\Gamma)$ trong đó $H_\mu(\Gamma) = P_i\,H_\mu(\Gamma)$ (13)

Từ (11) ÷ (13) ta dễ dàng chứng minh:

*Định lý 7:* 1) Điều kiện cần và đủ để phương trình (12) giải được là hệ phương trình

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_{k,n-j}\,\Phi_k = P_{n-j}\,f\,; \quad j \neq n-1 \\[2ex] \sum_{k=1}^{n} C_k\,\Phi_k + S\,\Phi_{n-1} = P_{n-1}\,f \end{cases} \tag{14}$$

giải được trong $H_{\mu}^{[n]}(\Gamma) = H_{\mu}^{1}(\Gamma) \times H_{\mu}^{2}(\Gamma) \times \dots \times H_{\mu}^{n}(\Gamma)$

2) Nghiệm của (10) được tính theo công thức

$$\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$$

trong đó $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ là nghiệm của hệ (14)

Vậy để giải phương trình (10) ta cần giải hệ (14)

Gọi $(\Phi_1^o, \Phi_2^o, \dots, \Phi_{n-2}^o, \Phi_n^o)$ là nghiệm của hệ tuyến tính

$$\sum_{k=1}^{n-2} C_{k,n-j}\Phi_k + C_{n,n-j}\Phi_n = P_{n-j}f - C_{n-1,n-j}\Phi_{n-1}\,;\; j \neq n-1$$

Thế vào phương trình cuối của (14) ta được phương trình đặc trưng Cauchy (trong đó nghiệm được xác định dưới dạng đóng [1,2]

$$C_{n-1}\Phi_{n-1} + S\Phi_{n-1} = P_{n-1}f - \sum_{k \neq n-1} C_k \Phi_k^o \tag{15}$$

trong đó $C_{n-1}$ được tính theo (11).

Hoàn toàn tương tự, ta có thể giải phương trình $a(t)\varphi(t) + S_n(b\varphi)(t) = f(t)$ theo phương pháp đã trình bày.

Trường hợp riêng, khi các hệ số $a(t), b(t) \in H_{\mu}^{o}(\Gamma)$ thì có thể giải phương trình đặc trưng:

$$a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,(k\varphi)\,(t) = f(t) \tag{16}$$

dưới dạng đóng bằng phương pháp đơn giản như sau:

*Định lý 8*: 1) Phương trình (16) giải được khi và chỉ khi các phương trình đặc trưng Cauchy

$$a(t)\,\Phi_j(t) + b(t)\,(S\Phi_j)(t) = (P_jf)(t)$$

giải được trong $H_{\mu}^{j}(\Gamma)$.

2) Nghiệm của phương trình (16) được tính theo công thức

$$\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$$

trong đó $\Phi_j$ là nghiệm của (17).

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи, Наука, М. 1977
2. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. Наука, М. 1977
3. Przeworska — Rolewicz D. Equations with transformed argument. Amsterdam — Warazawa, 1973.
4. Przeworska — Rolewicz D. and Rolewicz S. Equations in linear spaces Warazawa, 1968.
5. Nguyễn Văn Mậu. Dem. Math. Vol. XVI, N 3, 375—405, 1983.


(*Xem tiếp trang 17*)