VỀ ĐẶC TRƯNG ĐẠI SỐ CỦA BỘ TOÁN TỬ LẬP THÀN ĐẠI SỐ HỮU HẠN CHIỀU TRÊN VÀNH

NGUYỄN ĐĂNG TUẤ

Trong [1] các tác giả đã xây dựng được simbol của lớp toán tử trừu tượn lập thành đại số hữu hạn chiều trên vành, khi vành đã cho bất biến đối với c toán tử sinh. Vì hạn chế này mà hầu hết các toán tử chứa dịch chuyển d không thuộc mô hình trừu tượng của [1]. Trong bài này, mở rộng các kết quả c [1] xây dựng simbol của lớp toán tử trừu tượng lập thành đại số hữu hạn chi cho phép khắc phục được những hạn chế đã nêu ở trên. Tiếp theo, dựa vào [xây dựng bó đa thức đặc trưng, từ đó tìm ra các tiêu chuẩn Noether và cô thức tường minh của toán tử chính quy hai phía. Trong những trường hợp đ biệt đã chỉ ra tiêu chuẩn khả nghịch và công thức tính toán tử nghịch đảo tươ ứng. Các áp dụng cụ thể của các mô hình đưa ra ở đây không được xét tro bài này, những áp dụng trực tiếp có thể thấy trong [3 – 5].

1. Giả sử Γ — chu tuyến đóng, đơn hoặc đường thẳng. Ký hiệu $X(\Gamma)$ — khô gian Banach các hàm trên Γ (với chuẩn đã biết). $S_1, S_2, \ldots, S_l$ — các toán tử tuy tính giới nội tác dụng trong $X(\Gamma)$. Để đơn giản, ta sử dụng ký hiệu:

$$(a\varphi)(t) = a(t)\,\varphi(t)$$

Ký hiệu: $\mathcal{L}(X(\Gamma))$ — đại số Banach tất cả các toán tử tuyến tính giới n tác dụng trong $X(\Gamma)$; $\mathcal{J}$ — iđêan hai phía các toán tử hoàn toàn liên tục.

Tiếp theo ta sử dụng giả thiết sau đây:

Trên Γ cho một vành F các hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện:

1. $\forall a(t) \in F$ thì $a \in \mathcal{L}(X(\Gamma))$; $\|a\|_{L} \leqslant \text{const}\, \|a\|_{C(\Gamma)}$

2. $\forall a \in F$, $\exists a_i(t) \in F$ sao cho: $S_i a - a_i S_i \in \mathcal{J}$

(trong [1] giả thiết các $a_i(t) = a(t)$; $i = 1, 2, \ldots, n$)

3. $\forall a \in F$ và $a(t) \neq 0$ $t \in \Gamma$ thì $[a(t)]^{-1} \in F$

4. $S_1, S_2, \ldots, S_l$ $(S_1 = I)$ độc lập tuyến tính trên F, tức là:

Nếu có $a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_l S_l \in \mathcal{J}$; $a_j \in F$ thì $a_1 = a_2 = \ldots = a_l = 0$

Xét đại số các toán tử dạng $A = \sum_{j=1}^{l} a_j S_j + T$

$$\mathcal{R} = \{A : A = \sum_{i=1}^{l} a_i S_i + T;\ a_i(t) \in F,\ T \in \mathcal{J}\}$$

và giả thiết rằng $(S_1 S_2, \ldots, S_l)$ lập thành một đại số hữu hạn chiều trên F:

$S_j = \sum_{k=1}^{l} \gamma_{ijk} S_k + T_{ij}$; $\gamma_{ijk}(t) \in F$; $T_{ij} \in \mathcal{J}$.

ễ thấy, $\mathcal{R}$ là một đại số trên C.

Ứng với mỗi $A \in \mathcal{R}$ ta ký hiệu $\tilde{A}$ là lớp thặng dư trong đại số thương $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{J} \cap \mathcal{R}$. Khi đó:

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^{l} a_i \bar{S}_i$$

Đặt $f_{\bar{A}}(\bar{X}) = \bar{A}.\bar{X}$ $(f_{\bar{A}} : \bar{\mathcal{R}} \to \bar{\mathcal{R}})$

a được một phép đẳng cấu từ đại số $\mathcal{R}$ vào đại số các phép biến đổi tuyến tính ủa môđun tự do. $\mathcal{R}$ trên vành F. Chọn $S_1 . S_2 .... S_l$ làm cơ sở thì ứng với mỗi $A \in \mathcal{R}$ phép biến đổi $f_{\bar{A}}$ cho ta một ma trận σ_A:

$$\sigma_A = \| a_{ij} \|_{ij=1}^{l} \quad ; \quad a_{ij} = \sum_{h=1}^{l} \gamma_{kjl} a_k$$

Định nghĩa 1: σ_A được gọi là simbol của toán tử A.

Tương tự như trong [4], ta viết $A \simeq B$ nếu $A - B \in J$. Đại số các matrận $l \times l$ các phần tử $\in F$ được ký hiệu là F_l.

Bằng tính toán trực tiếp, ta có thể chứng minh:

Định lý 1: Để ánh xạ $\Phi : \mathcal{R} \to F_l$

$$A \to \sigma_A$$

xác định một đồng cấu thì điều kiện cần và đủ là

$$\sum_{q=1}^{l} \left(\sum_{h=1}^{l} \gamma_{pqk} \gamma_{kji} \right) l_{pq} = \sum_{q=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{qki} \gamma_{qjk} \right) b_q \tag{1}$$

$$(i,j \neq p = 1,2,\ldots,l)$$

trong đó $b_p \in F$ và $S_p b_q \simeq b_{pq} S_p$.

Về sau, ta luôn luôn giả thiết (1) được thỏa mãn.

2. Các đặc trưng đại số và các tiêu chuẩn Noether.

Tương tự như trong [2], ta đưa ra định nghĩa:

Định nghĩa 2. Toán tử $A \in L(X(\Gamma))$ được gọi là toán tử dạng đại số trên F nếu tồn tại bó đa thức toán tử:

$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ sao cho

i) $a_i(t) \in F$; $i = 1,2,\ldots,n$

ii) $F(A) \simeq 0$

iii) $[A, a_j]$; $j = 1,2,\ldots,n$.

Vì F là vành giao hoán nên có thể đặt:

$P_A(\lambda) = \det(\lambda \sigma_I - \sigma_A) \lambda^l - \varphi_i(A) \lambda^{n-1} + \ldots + (-i)^l \varphi_2(A)$

Nhận xét rằng khi, $A \in R$ thì $\varphi_k(A) \in F$ và:

$$\varphi_i(A) = \sigma_p \, \delta_A \quad ; \quad \varphi_l(A) = \det \sigma_A$$

Định lý 2: Mọi $A \in R$ đều là toán tử dạng đại số.

Chứng minh. Do Φ là đồng cấu nên i và iii) là hiển nhiên. Ta chứng minh ii) thỏa mãn. Thật vậy, theo định lý Hamilton Cayley thì $P_A(\sigma_A) = 0$. Mặt khác

$$\Phi(P_A(A)) = \Phi(A^l - \varphi_1(A) A^{l-1} + \ldots + (-1)^l \varphi_l(A)) =$$
$$= (\sigma_A)^l - \varphi_1(A)(\sigma_A)^{l-1} + \ldots + (-1)^l \varphi_l(A) = P_A(\sigma_A) = 0$$

Do Φ đồng cấu, nên $P_A(A) \simeq 0$. Định lý được chứng minh.

Từ các định lý 1 và 2 ta nhận được các tiêu chuẩn Noether và dạng tường minh của toán tử chính quy hóa.

Định lý 3: Điều kiện đủ để $A \in \mathcal{R}$ là toán tử Noether là simbol σ_A không suy biến.

Chứng minh. Ta có $\det \sigma_A(t) \neq 0$ nên theo giả thiết 3) trong 1, ta được $[\det \sigma_A(t)]^{-1} \in F$. Đặt

$$R = (-1)^{l-1} [\det \sigma_A]^{-1} Q_A(A).$$

trong đó $Q_A(\lambda) = [P_A(\lambda) - P_A(c)]/\lambda$

thì $RA = (-1)^{l-1} [\det \sigma_A]^{-1} Q_A(A) A = I$

Tương tự $AR = I$.

Vậy A là toán tử Noether. Định lý được chứng minh.

Định lý 4: Nếu A là toán tử Noether và toán tử chính quy R của nó thuộc $\mathcal{R}$ thì simbol σ_A không suy biến.

Chứng minh: Theo giả thiết $R \in \mathcal{R}$ nên $\Phi(AR) = \sigma_A . \sigma_R = \sigma_I$.
Tương tự $\Phi(RA) = \sigma_R \sigma_A = \sigma_I$. Từ đây ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét rằng F là đại số giao hoán, do vậy, mỗi phần tử $\sigma_A \in F_l$ đều có một đa thức tối thiểu tương ứng. Về xác định đa thức tối thiểu của A được tính theo quy tắc sau đây:

Định lý 5: Nếu $M_A(\lambda)$ là bó đa thức tối thiểu của σ_A thì nó cũng là đa thức tối tiểu của A.

Chứng minh: được suy trực tiếp từ tính đồng cấu của ánh xạ

$$\Phi : A \to \sigma_A$$

3. *Tiêu chuẩn khả nghịch.*

Trong mục này ta sẽ cho một tiêu chuẩn khả nghịch của toán tử A trong trường hợp Φ là đẳng cấu.

Giả sử $A = \sum_{i=1}^{l} a_i S_i$ thỏa mãn các điều kiện:

1. $\forall a \in F$; $\exists a_i \in F$ sao cho $S_i a = a_i S_i$

2. $S_i S_j = \sum_{k=1}^{l} \gamma_{ijk} S_k$

$P_A(\lambda) := \det(\lambda \sigma_I - \sigma_A) = \lambda^l + b_1 \lambda^{l-1} + \ldots + b_l$

Khi đó có thể phát biểu:

Định lý 6 : Toán tử A khả nghịch khi và chỉ khi $b_l(t) \neq 0$. Khi đó toán tử nghịch đảo được tính theo công thức :

$$A^{-1} = -b_l^{-1} (A^{l-1} + b. A^{l-2} + ... + b_{l-1})$$

Chứng minh : Thật vậy, xét phương trình $A\varphi = f$ trong X (Γ). Khi đó :

$$[P_A (A) - b_l] \varphi = (A^{l-1} + b. A^{l-2} + ... + b_{l-1}) f$$

hay $-b_l \varphi = (A^{l-1} + b_l A^{l-2} + .. + b_{l-1}) f$

Vậy nếu $b_l \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $\varphi = A^{-1} f$

Nếu $b_l (t_0) = 0$ thì điều kiện cần để phương trình có nghiệm là

$$(A^{l-1} + b_l A^{l-2} + ... + b_{l-1}) f (t_0) = 0$$

Do vậy, nếu chọn f (t) mà điều kiện (2) không thỏa mãn thì phương trình $A\varphi = f$ không giải được, từ đó suy ra A không khả nghịch.

Nhận xét : Định lý 6 có thể xem như hệ quả trực tiếp của định lý 4 khi phép đồng cấu Φ được thay bởi phép đẳng cấu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Василевский Н. Л; Гутников Е. В. О символе операторов образующих конечномерные алгебры. ДАН СССР 221, N1, 1975.
2. Nguyễn Văn Mậu. Đặc trưng đại số và vấn đề chính quy hóa toán tử kỳ dị với dịch chuyển và liên hợp phức. «Tóm tắt luận án PTS», Hà nội 1982.
3. Гахов Ф. А. Краевые задачи. «Наука», М. 1977.
4. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные со сдвигом. «Наука» м. 1977.
5. Przeworska—Kolewicz D. Equations with transformed argument an algebraic approach. Warszaws 1973.
6. Нгуен Ван Мау. О регуляризации сингулярных интегральных операторов со сдвигом карлемана «Диф. урав» TXX, N5, 1984.

Нгуен Данг Туан

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ОБРАЗУЮЩИХ КОНЕЧНУЮ АЛГЕБРУ НАД КОЛЬЦОМ

Рассматривается один класс абстрактных операторов включенных в себе многие конкретные виды сингулярных интегральных операторов. Построен символ $б_A$ оператора A и найден критерий голоморфности отображения $A \to б_A$, условия нётеровости и общий вид регуляризатора. В частности, доказано, что каждый оператор порожденный конечной алгеброй является оператором алгебраического типа над данным кольцом.

Nguyen Dang Tuan

SOME ALGEBRAIC CHARACTERIZATIONS OF OPERATORS FORMING FINITE DIMENSIONAL ALGEBRA ON A RING

Consider a class of abstract operators generalizing special models studied before, when the given operators form a finite dimesional algerba on a commutative ring. We find simbol, homeomorphism criterion, Noether criterion and regularizatio. expression. In special case it is showed that these operators are those of algebraic form on the given ring.

Nhận ngày 15-11-1985