TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 1994

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA HÀM GREEN TRONG MÔ HÌNH BỐN FECMION

Nguyễn Xuân Hãn
Khoa lý, ĐHTH Hà Nội
Đặng Văn Soa
Khoa cơ bản, Đại học Mỏ Địa chất
Eap Ponna
Khoa Lý, ĐHTH Phnôm Pênh

§1. MỞ ĐẦU

Khi giải quyết vấn đề cầm tù của các quark trong sắc động học lượng tử (QCD), người ta thường nghiên cứu các kỳ dị hồng ngoại của hàm truyền gluco hay hàm Green của quark ở gần mặt khối lượng [1-5]. Nhiều tác giả chứng minh rằng tại vùng năng lượng thấp QCD chuyển tới lý thuyết tới hạn với tương tác hiệu dụng bốn fecmion [6, 7]. Trong khuôn khổ của phương pháp như vậy các số liệu thực nghiệm về các meson được mô tả khá phù hợp với các tính toán lý thuyết tại vùng năng lượng thấp [8, 9]. Chính vì vậy, việc nghiên cứu mô hình bốn fecmion ở vùng năng lượng hồng ngoại là một việc làm cần thiết và lý thú. Mục đích cụ thể của thông báo này, chúng ta muốn xem xét sự cầm tù của quark có thể được thực hiện trong mô hình này không ?. Theo các tác giả [10] sự cầm tù của quark được hiểu như sự trượt tiêu cực đơn ở hàm Green của fecmion tại điểm $p^2 = -m^2$, p, m là xung lượng và khối lượng của fecmion tại mặt khối lượng. Bài toán này được nghiên cứu trong khuôn khổ của phương pháp tích phân phiếm hàm [11]. Ở mục §2 hàm Green của fecmion tại trường tập thể ngoài trong mô hình bốn fecmion được biểu diễn dưới dạng tích phân phiếm hàm. Ở mục §3 ta sử dụng phép gần đúng "các qũy đạo thẳng" để tính các tích phân phiếm hàm cho hàm Green của fecmion. Kết quả nhận được đã chứng tỏ rằng tại vùng hồng ngoại hàm Green của fecmion có cực đơn. Điều này có nghĩa là sự cầm tù của quark không tồn tại trong mô hình bốn fecmion, ở đây ta sử dụng hệ đơn vị, $\hbar = c = 1$, và metric $x_\mu = x^\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4 = it)$.

§2. HÀM GREEN CỦA FECMION TẠI TRƯỜNG TẬP THỂ NGOÀI

Chúng ta xét mô hình đơn giản bốn fecmion không khối lượng tương tác cùng với Lagrangian

$$\mathcal{L}(x) = -\overline{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \frac{G}{2}(\overline{\psi}\psi)^2, \tag{1}$$

ở đây G là hằng số tự tương tác, và có thứ nguyên m^{-2}. Trong khuôn khổ của phương pháp tích phân phiếm hàm cùng với các biến tập thể hàm Green của fecmion ở ngoài trường thỏa mãn phương trình sau:

$$\left[\gamma_\mu\partial_\mu + m - g\Phi(x)\right]G(x,y|\Phi) = \delta^{(4)}(x-y), \tag{2}$$

m là khối lượng động lực của fecmion, g, Φ là hằng số liên kết và trường tập thể đã được tái chuẩn hóa. Nếu kể tới sự phân cực của chân không ở trường Φ do sự đóng góp của định thức fecmion, thì trong hàm tác dụng hiệu dụng sẽ có thêm các thành phần động năng $\frac{1}{2}\Phi\Box\ \Phi$ và số hạng khối lượng $-\frac{1}{2}M^2\Phi^2$, M là khối lượng của trường tập thể Φ. Trong khi xem xét bài toán này chúng ta giới hạn đến số hạng bậc hai $S^{(2)}_{eff}$ của phép khai triển hàm tác dụng hiệu dụng theo trường tập thể Φ, có nghĩa là giới hạn tương tác Yukawa $g\bar{\psi}\psi\Phi$. Kết quả chúng ta sẽ có biểu diễn dưới đây để cho hàm Green lượng tử

$$G(x,y) = \int D\Phi G(x,y|\Phi)\exp\left\{i\int d^4x\frac{1}{2}\Phi(\Box\ - M^2)\Phi\right\}. \tag{3}$$

Muốn nghiên cứu dáng điệu hồng ngoại của hàm Green (3), ta tiến hành từng bước như sau: phải tìm nghiệm của phương trình (2), sau đó thực hiện phép lấy trung bình phiếm hàm theo công thức (3) các nghiệm này theo trường tập thể ngoài Φ tại vùng năng lượng hồng ngoại.

Đối với hàm Green của fecmion, thường người ta sử dụng công thức

$$G(x,y|\Phi) = \left[\gamma_\mu\partial_\mu - m + g\Phi(x)\right]D(x,y|\Phi). \tag{4}$$

Thay (4) vào (2), chúng ta có phương trình

$$\left[\Box\ - (m-g\Phi)^2 + g\gamma_\mu\partial_\mu\Phi(x)\right]D(x,y|\Phi) = \delta^{(4)}(x-y). \tag{5}$$

Theo cách giải do Fock [12] và Feynman [14] đề xướng, ta viết nghiệm phương trình (5) dưới dạng:

$$D(x,y|\Phi) = k\int_0^\infty dS\exp\left\{i\int_0^S i\partial_\mu(\xi)i\partial_\mu(\xi)d\xi + \right.$$
$$\left. + i\int_0^S d\xi\left[(m-g\Phi(x,\xi))^2 + g\gamma_\mu(\xi)\partial_\mu(\xi)\Phi(x,\xi)\right]\right\}\delta^{(4)}(x-y) \tag{6}$$

Trong công thức (6) ở chỉ số của hàm số mũ có chứa các đại lượng không giao hoán $\partial_\mu(\xi)$, $\Phi(x,\xi)$, hàm số mũ được xem xét như T_ξ-hàm số mũ, còn biến ξ có vai trò là chỉ số thứ tự theo thuật ngữ của Feynman [13].

Chỉ số của hàm số mũ của công thức (6) có chứa dạng bình phương theo toán tử vi phân ∂_μ. Vì vậy chuyển từ T_ξ-hàm số mũ sang biểu thức toán tử thông thường (ta phải "gỡ rối" các toán tử theo thuật ngữ của Feynman) không thể làm được nếu không khai triển nó thành chuỗi. Để lảng tránh khó khăn này, chúng ta sử dụng phép biến đổi hình thức dưới đây [14] để hạ bậc toán tử ∂_μ:

$$\exp\left\{i\int_0^S d\xi i\partial_\mu(\xi)i\partial_\mu(\xi)\right\} =$$
$$= C\int\delta^4\nu_\mu(\xi)\exp\left\{-i\int_0^S\nu_\mu^2(\xi)d\xi + 2i\int_0^S d\xi\nu_\mu(\xi)i\partial_\mu(\xi)\right\}. \tag{7}$$

Ở đây tích phân phiếm hàm được tính trong không gian hàm số $\nu_\mu(\xi)$ theo độ đo Gauss. Hằng số C được lựa chọn từ điều kiện.

$$C\int_0^S \delta^4\nu_\mu(\xi)\exp\left\{-i\int_0^S \nu_\mu^2(\xi)d\xi\right\}=1. \tag{8}$$

Sau khi thay (7) vào (6), và ta tiến hành "gỡ rối" toán tử $\exp\left\{2i\int_0^S d\xi\nu_\mu(\xi)i\partial_\mu(\xi)\right\}$, ta thu được nghiệm của phương trình (5) dưới dạng tích phân phiếm hàm:

$$D(x,y|\Phi)=i\int_0^\infty dS\int\left[\delta^4\nu_\mu\right]_0^S\exp\left\{i\int d^4zj(z)\left[(m-g\Phi(z))^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+g\gamma_\mu\partial_\mu\Phi(z)\right]\right\}\delta^{(4)}(x-y-2\int_0^S\nu(\eta)d\eta), \tag{9}$$

$$j(z)=\int_0^S d\xi\delta(z-x+2\int_\xi^S\nu(\eta)d\eta),$$

$$\left[\delta^4\nu_\mu\right]_0^S=\frac{\left[\delta^4\nu_\mu\right]\exp\left\{i\int_0^S\nu_\mu^2(\xi)d\xi\right\}}{\int\left[\delta^4\nu_\mu\right]\exp\left\{i\int_0^S\nu_\mu^2(\xi)d\xi\right\}}$$

Thay (9) vào (4), chúng ta tìm được biểu diễn nghiệm phương trình (2),

$$G(x,y|\Phi)=\left(\gamma_\mu\partial_\mu-m+ig\frac{\delta}{\delta j(z)}\right)i\int_0^\infty dS\int\left[\delta^4\nu\right]_0^S\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{i\int d^4z\Big(j(z)\left[(m-g\Phi(z))^2-g\gamma_\mu\partial_\mu\Phi(z)\right]+j(z)\Phi(z)\Big)\right\}\times$$
$$\times\delta^{(4)}(x-y-2\int_0^S\nu(\eta)d\eta) \tag{10}$$

Tiếp theo ta bỏ số hạng $g\gamma_\mu\partial_\mu\Phi(z)$ liên quan tới hiệu ứng spin trong công thức (10), vì trong vùng năng lượng hồng ngoại hiệu ứng spin cho đóng góp không đáng kể [14, 15]. Việc thay thế (10) vào công thức (3) sẽ tạo ra tích phân dạng Gauss theo trường Φ điều đó giúp ta thực hiện phép lấy tích phân một cách dễ dàng,

$$\int D\Phi\exp\left\{i\int d^4z\left[j(z)(m-g\phi(z))^2+j(z)\Phi(z)-\frac{1}{2}\Phi(\Box-M^2)\Phi\right]\right\}=$$
$$=Ne^{-im^2S}\det{}^{-1/2}\left[\Box-M^2-2g^2j(z)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4zd^4y\left[j(z)-2mgj(z)\right]\Delta(z-y)\left[j(y)-2mgj(y)\right]\right\}. \tag{11}$$

Hàm truyền $\Delta(z-y)$ ở đây thỏa mãn phương trình

$$[\Box - M^2 - 2g^2 j(z)]\Delta(z-y) = \delta^{(4)}(z-y). \tag{12}$$

Thay (10)-(12) vào (3), chúng ta thu được biểu thức tổng quát cho hàm Green của fecmion dưới dạng tích phân phiếm hàm.

$$G(x,y) = N\int_0^\infty dS e^{-imS}\int[\delta^4\nu]\det{}^{-1/2}[\Box - M^2 - 2g^2 j(z)]\times$$
$$\delta^{(4)}(x-y-2\int_0^S \nu(\eta)d\eta)(\gamma_\mu\partial_\mu - m + ig\frac{\delta}{\delta j})\times$$
$$\exp\left\{\frac{1}{2}\int d^4zd^4y(j(z)-2mgj(z))\Delta(z-y)(j(y)-2mgj(y))\right|_{j=0}. \tag{13}$$

§3. DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN HỒNG NGOẠI HÀM GREEN CỦA FECMION

Để tiếp tục nghiên cứu biểu thức (13) ở vùng năng lượng hồng ngoại ta cần phải có các giả thiết sau:

1. hằng số liên kết g là nhỏ ($g^2 < 1$). Điều kiện này được thỏa mãn, nếu ta xem các mô hình bốn fecmion tương tác ở vùng năng lượng thấp [8, 9].

2. Để tính toán các tích phân phiếm hàm theo các biến ν_μ, xuất hiện trong công thức (13) ta sử dụng phép gần đúng "quĩ đạo thẳng" *1/ [14, 16]

$$\int[\delta^4\nu]F_1[\nu]\exp(F_2[\nu]) \simeq \overline{F_1[\nu]}\exp\overline{(F_2[\nu])},$$
$$\overline{F_i[\nu]} = \int[\delta^4\nu]F_i[\nu], \quad i = 1,2. \tag{14}$$

Bằng ngôn ngữ của giản đồ Feynman phép gần đúng (14) tương ứng với việc bỏ các số hạng dạng $\sum_{i\neq j} k_i k_j$ so với các số hạng $2p\sum_i k_i$ trong các hàm truyền của fecmion

$$\left[\left(p+\sum_i k_i\right)^2 - m^2\right]^{-1} \longrightarrow \left[2p\sum_i k_i + \sum_i k_i^2\right]^{-1} \tag{15}$$

trong đó p là xung lượng của fecmion, k là xung lượng ảo của trường boson. Cần lưu ý rằng phép gần đúng $k_i k_j = 0$ cũng đã được sử dụng rộng rãi để nghiên cứu các bài toán tán xạ đàn tính và không đàn tính các hạt cơ bản trong vùng năng lượng cao vào xung lượng truyền hữu hạn [17].

Sử dụng giả thiết 1. Ta có thể tìm nghiệm của phương trình (12) bằng phương pháp lặp. Đối với bài toán ta đang xem xét, chỉ cần giới hạn số hạng gần đúng bậc không của khai triển hàm truyền $\Delta(z-y)$ theo hằng số liên kết g là đủ. Ở biểu diễn xung lượng số hạng gần đúng bậc không: $\Delta^{(0)}(p) = (p^2+M^2)^{-1}$. Hằng số N có thể chọn từ điều kiện: $N\det{}^{-1/2}(\Box - M^2 - 2g^2 j(z)) = 1$. Điều này hoàn toàn phù hợp với đòi hỏi hàm Green tự do ($g=0$) của fecmion có dạng tiêu chuẩn.

---

*1/ Tên gọi phép gần đúng "quĩ đạo thẳng" là vì các biến $\nu_\mu(\xi)$ mô tả độ lệch của quĩ đạo hạt so với quĩ đạo thẳng [16]

Sử dụng giả thiết 2 cho phép ta tính các tích phân phiếm hàm trong công thức (13). Kết quả chúng ta nhận được biểu thức sau

$$G(p) = i \int_0^\infty dS e^{iS(p^2+m^2)} (i\hat{p} - m) \exp\left\{iI(s)\right\}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} I(s) &= 2m^2 g^2 \int_0^S d\xi_1 \int_0^S d\xi_2 \int [\delta^4\nu]_0^S \Delta^{(0)}\Big(2\int_{\xi_1}^{\xi_2} \omega(\eta)d\eta + 2p|\xi_1 - \xi_2|\Big) = \\ &= 2m^2 g^2 \int_0^S d\xi_1 \int_0^S d\xi_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\left\{i|\xi_1 - \xi_2|(k^2 - 2pk)\right\}}{k^2 + M^2}, \end{aligned} \tag{17}$$

$\nu_\mu(\xi) = p_\mu + \omega_\mu(\xi)$.

Ở đây khi tính toán để nhận biểu thức (16), chúng ta đã sử dụng phép thay thế biến lấy tích phân. Các công thức nhận được (16), (17) đã hoàn chỉnh hơn kết quả của tác giả [16] ở chỗ kể thêm các đại lượng toàn phương theo xung lượng ảo của boson k với góc độ chọn các số hạng phân kỳ. Theo lập luận tương tự đã được trình bày ở [15] các số hạng phân kỳ dạng tuyến tính và phân kỳ dạng lôga có trong biểu thức (17) ở vùng xung lượng lớn k có thể được loại bỏ bằng việc tái chuẩn hóa khối lượng của fecmion và các trường tương ứng.

Ở vùng năng lượng thấp, khi $p^2 = -m^2$, có nghĩa ở vùng hồng ngoại, thì đóng góp chủ yếu cho tích phân (17) xẩy ra với trị s lớn. Vì vậy chúng ta có thể thay thế hàm $I(s)$ bằng giá trị tiệm cận của nó : $\lim_{s\to\infty} I(s)$.

$$\exp\left\{iI(s)\right\} = 1 - \frac{g^2}{32(\pi M m S)^{3/2}} \exp\left\{-2iMmS + i\frac{\pi}{4}\right\}. \tag{18}$$

Sau khi thực hiện những phép tính cần thiết, chúng ta nhận được biểu thức dưới đây cho hàm Green lượng tử của fecmion.

$$G(p) = \frac{-i\hat{p} + m}{p^2 + m^2} + \mathrm{const}(-i\hat{p} + m). \tag{19}$$

Từ công thức (19) ta thấy hàm Green của fecmion trong mô hình bốn fecmion có cực đơn. Trong phép gần đúng đã sử dụng ở đây không xẩy ra sự tăng cường hay sự làm yếu đi cực đơn này. Kết luận này hoàn toàn phù hợp với kết quả đã thu được trước đây [15], mà ở đó đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của hàm Green fecmion trong điện động lực học meson vô hướng.

Kết luận : Trong mô hình đơn giản bốn fecmion ta đã tìm được dáng điệu tiệm cận hồng ngoại hàm Green của fecmion dưới dạng cực đơn. Kết quả này chúng tỏ rằng hiện tượng cầm tù của quark tại vùng năng lượng hồng ngoại không thể tồn tại được trong mô hình đang xét. Việc giải thích và tìm cơ chế cho sự cầm tù của quark hiện vẫn còn là vấn đề tranh luận trong lý thuyết sắc động học lượng tử ngày nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Mandelstam S., Phys. Rev. **D20** (1979) p. 323.

2. Baker M., Ball J. S., Zachariasen F., Nucl. Phys. **B186** (1981) p. 531.

3. Cea P., Castorina P., Nuovo Cim. **A81** (1984) p. 576.

4. Pagels H., Phys. Rev., **D15** (1977), p. 2991.

5. Cornwall J. M., Tiktopoulos G., Phys. Rev. **D15** (1977) p. 2937.

6. Dhar A., Shankar R., Wadia S. P., Phys. Rev. **D31** (1985) p. 3256.

7. Karcher N. I., Slavnov A. A., Teor. Math. Fiz. **65** (1985) p. 192.

8. Volkov M. K., Ann. of Phys., **157** (1984) p. 282.

9. Volkov M. K., Fiz. Elem. Chastits Atom. Yadra. **17** (1986) p. 433.

10. Nguyen Suan Han, Pervushin V. N., Fortschr. Phys. **8** (1989) p. 611, Modern Phys. Lett. **A6** (1987) p. 367.

11. Pervushin V. N. et. al. Elem. Chastits Atom. Yadra , **10** (1979) p. I114.

12. For W. Phys. Zs. Sowietunion, **12** (1937) p. 404.

13. Feynman R. P., Phys. Rev. **84** (1951) p. 108.

14. Barbashov B. M., ZEPT, **48** (1965) p. 607.

15. Milekhin G. A., ZETP, **43** (1962) p. 1012.

16. Barbashov B. M. et. al. Teor. Mat. Fiz. **3** (1970) P. 342.

INFRARED ASYMPTOTICS OF THE GREEN'S FUNCTION IN A FOUR-FERMION MODEL

Nguyen Suan Han, Dang Van Soa, Eap Ponna

Faculty of Physics, Hanoi University

It is shown that in a four-fermion model the Green function of the fermion has a simple pole in the infrared energy region. Obtained result means that the quark confinement is not realized in this model.