BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐÀO THỊ THANH HÀ

CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD CỦA MỘT SỐ LỚP MÔĐUN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 62.46.05.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

2009

Công trình được hoàn thành tại:

Trường Đại học Vinh

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa
PGS. TS. Ngô Sỹ Tùng

Phản biện 1: GS. TSKH. Hà Huy Khoái

Phản biện 2: GS. TS. Lê Văn Thuyết

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp nhà nước

họp tại: ....

....

....

vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm ....

Có thể tìm hiểu về luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Vinh

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài:

Cho $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức phân bậc chuẩn và M là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của M là số

$$\mathrm{reg}(M) = \inf\{p \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j = 0 \ \forall i, j : i + j > p\},$$

trong đó $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương phân bậc thứ i với giá là iđêan cực đại thuần nhất $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford đóng một vai trò quan trọng không chỉ trong Đại số giao hoán mà cả trong Hình học đại số. Chẳng hạn, vì nó chặn trên tất cả các bậc sinh cực đại của các môđun xoắn nên có thể xem nó như một độ đo về sự phức tạp của môđun. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford còn có thể được dùng để đo độ phức tạp của thuật toán Buchberger. Chính vì vậy vấn đề nghiên cứu chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford không chỉ có ý nghĩa lý thuyết, mà còn có ý nghĩa thực tiễn, theo nghĩa khi có một bài toán cụ thể, nó cho biết sơ bộ thời gian cần chạy của một phần mềm định sử dụng và do đó biết trước khả năng có thể sử dụng được phần mềm đó hay không. Đây là một vấn đề nghiên cứu thời sự, được nhiều người quan tâm.

2. Mục đích nghiên cứu:

Mục đích nghiên cứu của đề tài này là thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho một số lớp môđun mới.

3. Đối tượng nghiên cứu:

Đối tượng nghiên cứu cụ thể của luận án là các môđun đối đồng điều địa phương, chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford và các bất biến liên quan như bậc suy rộng, a-bất biến.

4. Phạm vi nghiên cứu:

Trong luận án này, chúng tôi chỉ nghiên cứu hai lớp môđun: lớp môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy và lớp môđun chính tắc cũng như các môđun khuyết của một môđun.

5. Phương pháp nghiên cứu:

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý thuyết, kết hợp với phần mềm máy tính CoCoA để tính một số ví dụ cụ thể. Lĩnh vực lý thuyết chúng tôi sử dụng là đại số giao hoán và đại số đồng điều.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án đã có những đóng góp lý thuyết mới. Cụ thể, chúng tôi đã thiết lập được chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của các lớp môđun: môđun phân bậc Buchsbaum dãy, môđun phân bậc k-Buchsbaum dãy, môđun chính tắc và các môđun khuyết của các môđun phân bậc.

Với các kết quả đạt được ta có thể thấy các phần mềm đại số hiện có có thể chạy khá tốt trên các lớp môđun Buchsbaum dãy hoặc k-Buchsbaum dãy với k bé.

7. Tổng quan luận án

Khái niệm chỉ số chính quy bắt nguồn từ những công trình về đường cong xạ ảnh của Castelnuovo và được Mumford định nghĩa và phát biểu cho các đa tạp xạ ảnh. Sau đó Eisenbud-Goto [7] diễn đạt theo ngôn ngữ Đại số giao hoán và cho các môđun phân bậc.

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford đóng một vai trò quan trọng không chỉ trong Đại số giao hoán mà cả trong Hình học đại số. Chẳng hạn, vì nó chặn trên tất cả các bậc sinh cực đại của các môđun xoắn nên có thể xem nó như một độ đo về sự phức tạp của môđun. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford còn có thể được dùng để đo độ phức tạp của thuật toán Buchberger như Bayer và Stillman đã chỉ ra. Vì vậy một trong những vấn đề đầu tiên đặt ra trong việc nghiên cứu chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là chặn trên nó thông qua các bất biến khác của môđun. Kết quả quan trọng và nổi tiếng nhất là của Gruson-Lazarsfeld-Peskine nói rằng đối với đường cong xạ ảnh không suy biến C : $\operatorname{reg}(C) \leq \deg(C) - \operatorname{codim}(C) + 1$, trong đó $\deg(C)$ là bậc, còn $\operatorname{codim}(C)$ là đối chiều. Khi chiều đa tạp V lớn hơn 1 thì giả thuyết Eisenbud-Goto nói rằng bất đẳng thức trên vẫn còn đúng, tức là $\operatorname{reg}(V) \leq \deg(V) - \operatorname{codim}(V) + 1$. Tuy nhiên giả thiết này chưa được chứng minh, trừ phi V thuộc một lớp đặc biệt nào đó. Chẳng hạn khi V là đa tạp Buchsbaum hoặc có $\deg(V) \leq \operatorname{codim}(V) + 2$ thì điều đó đã được St$\ddot{u}$ckrad và Vogel chứng minh (xem [15]). Với giả thiết yếu hơn khi V là đa tạp Cohen-Macaulay suy rộng thì có một số bất đẳng thức yếu hơn. Các nghiên cứu này (kể cả cho môđun) đã được một số tác giả tiến hành (chẳng hạn xem [12], [13]).

Bài toán thứ nhất được xét đến trong luận án này là chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun Buchsbaum dãy và môđun k-Buchsbaum dãy. Sau ý tưởng của Stanley, N. T. Cường-L. T. Nhàn đã đưa ra khái niệm môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy (xem [6]). Kết hợp với khái niệm môđun k-Buchsbaum trước đó, chúng tôi trước hết phân loại môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy thành các môđun k-Buchsbaum dãy. Chúng tôi sẽ chứng minh rằng đối với lớp các môđun này chúng ta cũng có chặn trên cho $\operatorname{reg}(M)$ tương tự như trường hợp môđun k-Buchsbaum (xem Định lý 2.3.4 và Định lý 2.4.2). Tuy nhiên cần phải nhấn mạnh rằng ngoài việc sử dụng số k, thì thay cho bậc thông thường, các chặn này được tính thông qua bậc số học, một khái niệm được đưa ra bởi Bayer và Mumford [3].

Song song với việc chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford người ta còn dùng nó để nghiên cứu các bất biến khác. Trong bài báo [9], chúng tôi bắt đầu nghiên cứu một hướng mới là sử dụng chỉ số chính quy

Castelnuovo-Mumford để chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun chính tắc. Với S-môđun M, môđun chính tắc có thể được định nghĩa như sau: $K^d(M) = Ext_S^{n-d}(M, S)(-n)$. Khái niệm này được đưa ra bởi Grothendieck và nó đóng vai trò quan trọng trong Đại số giao hoán và Hình học đại số. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là có chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $\mathrm{reg}(K^d(M))$ của $K^d(M)$ theo $\mathrm{reg}(M)$ hay không? Bên cạnh môđun chính tắc, chúng ta cũng quan tâm đến vấn đề tương tự đối với tất cả các môđun khuyết $K^i(M) = Ext_S^{n-i}(M, S)(-n), i < d$.

Bài toán chặn trên $\mathrm{reg}(K^i(M))$ theo $\mathrm{reg}(M)$ là bài toán thứ hai xét đến trong luận án. Đây là bài toán có ý nghĩa, vì ta có thể nói $\mathrm{reg}(K^i(M))$ kiểm soát dáng điệu của $l(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j)$ ở các thành phần âm. Chú ý rằng trong các bài báo của M. Brodmann và một số người khác đã xét đến vấn đề khi nào thì $l(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_j)$ trở thành đa thức (chẳng hạn xem [4]). Như vậy có thể nói rằng chặn trên $\mathrm{reg}(K^i(M))$ là tiếp nối vấn đề của Brodmann và các cộng sự.

Chúng tôi bắt đầu nghiên cứu với môđun chính tắc. Khi M là môđun k-Buchsbaum dãy thì có chặn trên tốt cho $\mathrm{reg}(K_M)$ (Mệnh đề 3.1.6). Tiếp đến chúng tôi hạn chế lại bằng việc xét trường hợp vành. Khi đó nếu môđun chính tắc của một vành là môđun Cohen-Macaulay thì ta cũng có chặn trên $\mathrm{reg}(K_R)$ theo $\mathrm{reg}(R)$ (Định lý 3.2.7). Lớp môđun Cohen-Macaulay chính tắc do Schenzel đưa ra gần đây (xem [14]). Nó là một mở rộng của môđun Cohen-Macaulay nhưng không phải là lớp con của môđun Cohen-Macaulay dãy. Thực chất của việc nghiên cứu trong trường hợp này là đánh giá a-bất biến của môđun chính tắc K_M. Đối với bài toán này ta không cần hạn chế gì về vành R (xem Định lý 3.2.6).

Sau bài báo [9], các tác giả L. T. Hoa và E. Hyry đã chặn trên được $\mathrm{reg}(K^i(R))$ cho tất cả các môđun khuyết $K^i(R)$ của một vành thương của vành đa thức (xem [11]). Lý do trong [11] chỉ giải quyết được cho trường hợp vành mà không giải quyết cho môđun vì chưa chặn trên được độ dài của môđun đối đồng điều địa phương.

Để chặn trên $\operatorname{reg}(K^i(M))$ theo $\operatorname{reg}(M)$ với M là môđun trước hết chúng tôi chặn trên độ dài các môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 4.1.3). Phương pháp chứng minh Định lý 4.1.3 ở đây hoàn toàn khác so với [10]. Nó dựa vào quy nạp theo thứ tự của các môđun đối đồng điều địa phương. Sau đó dựa theo phương pháp của L. T. Hoa-E. Hyry chúng tôi áp dụng cho môđun. Kết quả chính là Định lý 4.2.13. Phương pháp của L. T. Hoa-E. Hyry là dựa vào kết quả chặn trên độ dài đối đồng điều địa phương cùng với kết quả của M. Brodmann, C. Metteotti, N. D. Minh ([4], Proposition 3.2) và dãy khớp của Schenzel liên kết môđun khuyết thứ $i+1$ của M với môđun khuyết thứ i của M và của M/xM (xem Bổ đề 3.2.5). Trên cơ sở đó có thể áp dụng quy nạp theo i. Khi đặt $M = R$ vào Định lý 4.2.13, chúng tôi gần như nhận được lại kết quả của [11], Theorem 14.

8. Cấu trúc luận án:

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận án được chia làm 4 chương.

Chương 1 là chương Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cần thiết về vành và môđun phân bậc, cũng như những tính chất cơ bản của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford nhằm giúp người đọc dễ dàng theo dõi nội dung luận án hơn.

Trong Chương 2 chúng tôi xét bài toán tìm chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun Buchsbaum dãy và môđun k-Buchsbaum dãy. Trong Mục 2.1 chúng tôi giới thiệu khái niệm môđun Buchsbaum dãy và môđun k-Buchsbaum dãy và một số ví dụ về các môđun đó. Khái niệm bậc số học được giới thiệu trong Mục 2.2. Bằng cách sử dụng lọc chiều chúng tôi đưa ra cách tính bậc số học thông qua bậc thông thường (Bổ đề

2.2.4). Trong Mục 2.3 chúng tôi thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun Buchsbaum dãy. Kết quả chính ở đây là Định lý 2.3.4. Có các ví dụ cho thấy cho thấy chặn trên của Định lý 2.3.4 là chặt và không thể thay thế $\operatorname{adeg}(R)$ bởi $\deg(R)$. Việc thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun k-Buchsbaum dãy được trình bày trong Mục 2.4. Kết quả chính của mục này là Định lý 2.4.2. Mục 2.5 chúng tôi đưa ra các ví dụ chứng tỏ rằng không thể bỏ k cũng như không thể thay bậc số học $\operatorname{adeg}(R)$ bằng bậc thông thường trong Định lý 2.4.2. Các kết quả của chương này được đăng trong phần đầu của bài báo [9] và bài báo [1].

Trong Chương 3 chúng tôi thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun chính tắc K_M thông qua $\operatorname{reg}(M)$ và các bất biến khác của M, trong đó M thoả mãn một số điều kiện đặc biệt. Trong Mục 3.1, chúng tôi chặn chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của K_M khi M là môđun Buchsbaum dãy (Mệnh đề 3.1.6) hoặc là môđun Cohen-Macaulay (Mệnh đề 3.1.7). Mục 3.2 nghiên cứu bài toán tương tự cho vành Cohen-Macaulay chính tắc. Kết quả chính của mục này là Định lý 3.2.7. Để chứng minh định lý này chúng tôi xét bài toán tổng quát hơn là tìm chặn trên cho a-bất biến của K_R cho một vành tuỳ ý (Định lý 3.2.6). Kết quả của chương này đã được đăng trong phần sau của bài báo [9].

Trong Chương 4 chúng tôi đưa ra chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của các môđun khuyết $K^i(M)$. Trước hết trong Mục 4.1 chúng tôi xét chặn trên độ dài của các thành phần phân bậc của các môđun đối đồng điều địa phương. Kết quả chính của mục này là Định lý 4.1.3. Tiếp theo, trong Mục 4.2 chúng tôi xét chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho các môđun khuyết $K^i(M)$. Kết quả chính của mục này là Định lý 4.2.13. Để chứng minh định lý này chúng tôi cần chứng minh cho trường hợp M là môđun phân bậc dương (Định lý 4.2.1).

Chứng minh ở đây là những tính toán phức tạp được trình bày trong 6 bổ đề (từ Bổ đề 4.2.7 đến Bổ đề 4.2.12). Phương pháp chứng minh dựa vào bài báo [11] và phần chuẩn bị được tóm lược trong các Bổ đề 4.2.3-4.2.6. Kết quả của Mục 4.1 được trình bày trong bài báo [5], còn kết quả của Mục 4.2 sau đó được cải tiến thêm và trình bày cũng ở bài báo [5].

Các kết quả trong luận án đã được công bố trong ba bài báo [1], [9], [5].

Một số thuật ngữ tiếng Việt chúng tôi dựa theo Luận án Tiến sỹ Khoa học của Lê Tuấn Hoa [2].

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Vành và môđun phân bậc

Cho M là môđun phân bậc trên vành đa thức phân bậc chuẩn S. Khi đó M có một giải tự do phân bậc tối tiểu

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_q} S(-a_{qi}) \xrightarrow{\varphi_q} \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\beta_1} S(-a_{1i}) \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_{i=1}^{\beta_0} S(-a_{0i}) \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

trong đó $a_{ki}, k = 1, \dots, q; 1 \leq i \leq \beta_k$ là những số nguyên. Các số β_i được gọi là số Betti thứ i của M. Số β_0 chính là số phần tử sinh tối tiểu của M và ta sẽ kí hiệu là $\mu(M)$. Số

$$\operatorname{gen}(M) = \max\{a_{01}, \dots, a_{0\beta_0}\}.$$

được gọi là bậc sinh của M. Chúng ta cũng dùng đến kí hiệu

$$\operatorname{indeg}(M) = \inf\{n \mid [M]_n \neq 0\} = \inf\{a_{01}, \dots, a_{0\beta_0}\}$$

(ta quy ước $\operatorname{indeg}(0) = \infty$).

1.2 Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford

Cho $R = S/I$, trong đó I là iđêan thuần nhất. Cho M là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d. Ta kí hiệu $\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$ là iđêan thuần nhất cực đại của R và $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M với giá là $\mathfrak{m}$.
Với mỗi môđun phân bậc N, ta đặt

$$a(N) = \sup\{t \in \mathbb{Z} \mid [N]_t \neq 0\},$$

(ta quy ước $a(0) = -\infty$), và

$$a_i(M) := a(H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Định nghĩa 1.2.1. (Xem [7]) *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của M là số*

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{i + a_i(M) \mid 0 \leq i \leq d\}.$$

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford có thể định nghĩa thông qua các bậc dịch chuyển a_{ij} nêu trong (1.1).

Định lý 1.2.2. (Xem [7], Proposition 1.1 và Theorem 1.2) *Cho M là một môđun phân bậc hữu hạn sinh trên S. Khi đó:*

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{a_{ij} - i \mid i = 0, \ldots, q \text{ và } j = 1, \ldots, \beta_i\},$$

trong đó a_{ij} là các số xác định ở giải tự do tối tiểu (1.1).

Nói riêng

$$\operatorname{reg}(M) \geq \max\{a_{0j} \mid j = 1, \ldots, \beta_0\} = \operatorname{gen}(M). \tag{1.4}$$

Như vậy, $\operatorname{reg}(M)$ cho chúng ta một chặn trên cho bậc sinh cực đại của M. Đó là một ý nghĩa quan trọng của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford.

Các tính chất của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford được sử dụng là:

Bổ đề 1.2.3. (Xem [31], Bổ đề 2.1) *Cho $r \geq \operatorname{gen}(M)$. Nếu $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{r-i} = 0$ với mọi $i \leq d$, thì* $\operatorname{reg}(M) \leq r$.

Bổ đề 1.2.4. (Xem [16], Corollary 20.19) *Cho*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

là dãy khớp ngắn các S-môđun hữu hạn sinh. Khi đó

(i) $\operatorname{reg}(M) \leq \max\{\operatorname{reg}(N), \operatorname{reg}(P) + 1\}$,

(ii) $\operatorname{reg}(N) \leq \max\{\operatorname{reg}(M), \operatorname{reg}(P)\}$,

(iii) $\operatorname{reg}(P) \leq \max\{\operatorname{reg}(N), \operatorname{reg}(M) - 1\}$.

Bổ đề 1.2.5. *Cho* $\dim(M) > 0$ *và* $y \in S_1$ *là phần tử lọc chính quy trên* M. *Cho* $p \geq 1$. *Khi đó*

$$\operatorname{reg}_p(M/yM) \leq \operatorname{reg}_p(M) \leq \operatorname{reg}_{p-1}(M/yM).$$

Gọi $P_M(t)$ là đa thức Hilbert của M. Ta có thể biểu diễn $P_M(t)$ một cách duy nhất dưới dạng

$$P_M(t) = e_0\binom{t+d-1}{d-1} - e_1\binom{t+d-2}{d-2} + \cdots + (-1)^{d-1}e_{d-1}, \quad (1.5)$$

trong đó $e_0, e_1, \ldots, e_{d-1}$ là các số nguyên và $e_0 > 0$. Hệ số e_0 được gọi là số bội của M, kí hiệu là $\deg(M)$ hoặc $e(M)$. Nếu $d = 0$ người ta quy ước $e(M) = l(M)$.

Định lý 1.2.6. (công thức Grothendieck-Serre) *Với mọi* t *ta có*

$$H_M(t) - P_M(t) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim_K(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_t).$$

Chương 2

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun k-Buchsbaum dãy

2.1 Môđun k-Buchsbaum dãy

Định nghĩa 2.1.1. (Xem [14], Definition 2.1 và [6]) Với mỗi số nguyên $0 \leq i \leq d$, gọi $\mathcal{D}_i$ là môđun con phân bậc lớn nhất của M sao cho $\dim \mathcal{D}_i \leq i$. Đặt $\mathcal{D}_{-1} = 0$. Dãy tăng

$$0 = \mathcal{D}_{-1} \subseteq \mathcal{D}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}_d = M$$

được gọi là *lọc chiều của M.*

Lọc chiều luôn xác định và duy nhất. Ta đặt

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{D}_i/\mathcal{D}_{i-1} \text{ với mọi } 0 \leq i \leq d.$$

Khi đó hoặc $\mathcal{M}_i = 0$ hoặc $\dim \mathcal{M}_i = i$.

Mục tiêu của chương này là nghiên cứu chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun Cohen-Macaulay suy rộng dãy.

Định nghĩa 2.1.4. Cho k là một số nguyên không âm. Một môđun M được gọi là *môđun k-Buchsbaum dãy* nếu mỗi môđun $\mathcal{M}_i, 0 \leq i \leq d$ là môđun k-Buchsbaum, có nghĩa là

$$\mathfrak{m}^k H^j_{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}_i) = 0 \text{ với mọi } j < \dim \mathcal{M}_i$$

Môđun M được gọi là *môđun Buchsbaum dãy* nếu mỗi môđun $\mathcal{M}_i, 0 \leq i \leq d$ là môđun Buchsbaum. Nếu vành $R = S/I$ là môđun k-Buchsbaum dãy thì nó được gọi là vành *k-Buchsbaum dãy*.

2.2 Bậc số học

Đối với môđun k-Buchsbaumn người ta chặn chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford thông qua bậc. Để mở rộng cho môđun k-Buchsbaum dãy ta phải thay khái niệm *bậc* thành một bất biến mới, gọi là *bậc số học* do Bayer và Mumford đưa ra.

Định nghĩa 2.2.1. *Bậc số học của M là số*

$$\operatorname{adeg}(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} \operatorname{mult}_M(\mathfrak{p}) e(S/\mathfrak{p}),$$

trong đó $\operatorname{mult}_M(\mathfrak{p}) = l(H^0_{\mathfrak{m}_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))$ là độ dài bội của $\mathfrak{p}$ đối với M.

Ta có mối liên hệ giữa $\operatorname{adeg}(M)$ và $\deg(M)$ thông qua lọc chiều như sau:

Bổ đề 2.2.4. *Cho $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_i\}_{-1 \le i \le d}$ là lọc chiều của M. Khi đó*

$$\operatorname{adeg}(M) = \deg(\mathcal{M}_d) + \operatorname{adeg}(\mathcal{D}_{d-1}) = \sum_{i=0}^{d} \deg(\mathcal{M}_i).$$

2.3 Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun Buchsbaum dãy

Bổ đề 2.3.3. *Cho M là môđun Buchsbaum. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(M) \le \operatorname{gen}(M) + \deg(M).$$

Hơn nữa, nếu $\dim(M) = 0$ hoặc M là môđun Buchsbaum có độ sâu dương, thì

$$\operatorname{reg}(M) \le \operatorname{gen}(M) + \deg(M) - 1.$$

Sử dụng các Bổ đề 2.2.4 và Bổ đề 2.3.3 và bằng phương pháp quy nạp theo độ dài lọc ta có kết quả chính của mục này như sau:

Định lý 2.3.4. *Giả sử M là S-môđun phân bậc Buchsbaum dãy. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(M) \le \operatorname{gen}(M) + \operatorname{adeg}(M) - 1.$$

Nói riêng, đối với vành Buchsbaum dãy R ta có

$$\operatorname{reg}(R) \le \operatorname{adeg}(R) - 1.$$

2.4 Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun k-Buchsbaum dãy

Trong mục này ta cho M là môđun k-Buchsbaum dãy với $k \ge 1$.

Bổ đề 2.4.1. (Xem [13], Corollary 2.8 và Lemma 4.6) *Giả sử M là môđun k-Buchsbaum, $k \ge 1$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(M) \le \operatorname{gen}(M) + \deg(M) + (d - \operatorname{depth}(M))k - 1.$$

Kết quả chính thứ hai của chương là định lý sau đây được công bố trong [9], và được chứng minh chi tiết trong [1].

Định lý 2.4.2. *Cho M là S-môđun phân bậc k-Buchsbaum dãy. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(M) \le \operatorname{gen}(M) + \operatorname{adeg}(M) + \frac{d(d-1)}{2}k - 1.$$

Phương pháp chứng minh cũng tương tự như chứng minh Định lý 2.3.4 kết hợp với Bổ đề 2.4.1.

2.5 Một số ví dụ

Kết quả sau chứng tỏ không thể bỏ số k trong Định lý 2.4.2 được.

Mệnh đề 2.5.1. *Xét vành sau đây*

$$R = \frac{K[x, y, u, v]}{((x, y)^2, xu^t + yv^t)},$$

trong đó $t \ge 1$. Khi đó R là vành $(2t-1)$-Buchsbaum 2-chiều, $\operatorname{adeg}(R) = 2$, $\operatorname{reg}(R) = t$, *trong khi chặn trong Định lý 2.4.2 là $2t$.*

Ví dụ sau đây chứng tỏ trong Định lý 2.4.2 ta không thể bỏ bậc số học $\operatorname{adeg}(R)$ được.

Ví dụ 2.5.5. Cho

$$R = \frac{K[x,y,u,v]}{(x^s,y)\cap(u,v)\cap(x,y^t,u)}, \text{ với } s,t \geq 2.$$

Đây là vành s-Buchsbaum dãy có chiều là $2, \operatorname{adeg}(R) = s+t, \operatorname{reg}(R) = \max\{s,t\}$ và chặn trong Định lý 2.4.2 là $2s+t-1$.

Chương 3

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun chính tắc

3.1 Lọc chiều và chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford

Môđun khuyết là môđun

$$K^i(M) = \operatorname{Ext}_S^{n-i}(M, S)(-n).$$

Đặc biệt môđun $K_M := K^d(M)$ được gọi là môđun chính tắc.

Câu hỏi chúng ta quan tâm ở chương này là:

Vấn đề: Chặn trên $\operatorname{reg}(K_M)$ theo $\operatorname{reg}(M)$ và các bất biến khác của M.

Bổ đề 3.1.3. *Giả sử $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_i\}_{-1\le i\le d}$ là lọc chiều của môđun M. Khi đó*

$$H^d_{\mathfrak{m}}(M) \cong H^d_{\mathfrak{m}}(\mathcal{M}_d) \text{ và } K_M \cong K_{\mathcal{M}_d}$$

như là các môđun phân bậc.

Để phát biểu kết quả tiếp theo ta cần khái niệm sau.

Định nghĩa 3.1.4. Cho N là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d. Một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất $\mathfrak{q}$ được gọi là *iđêan N-chuẩn tắc* nếu với mọi hệ tham số thuần nhất $y_1, \ldots, y_d$ của N chứa trong $\mathfrak{q}$ ta đều có

$$\mathfrak{q}H^i_{\mathfrak{m}}\big(N/(y_1, \ldots, y_j)N\big) = 0 \ \forall i, j : i + j < d.$$

Ta có mối liên hệ sau:

Bổ đề 3.1.5. *Cho $k > 0$. Nếu $\mathfrak{m}^k$ là iđêan M-chuẩn tắc thì M là môđun k-Buchsbaum. Ngược lại nếu M là môđun k-Buchsbaum thì $\mathfrak{m}^{2k}$ là iđêan M-chuẩn tắc.*

Từ các kết quả trên ta nhận được:

Mệnh đề 3.1.6. *Cho $k \geq 1$ và $d > 0$. Giả thiết $\mathfrak{m}^k$ là iđêan $\mathcal{M}_d$-chuẩn tắc. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(K_M) \leq -\operatorname{indeg}(M) + (d-1)k + 2.$$

Nói riêng, nếu M là môđun Buchsbaum dãy, thì

$$\operatorname{reg}(K_M) \leq -\operatorname{indeg}(M) + d + 1.$$

Mệnh đề 3.1.7. *Giả sử $\mathcal{M}_d$ là môđun Cohen-Macaulay. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(K_M) \leq -\operatorname{indeg}(M) + d.$$

Hơn nữa, dấu "=" xảy ra nếu $M = R$ là một vành có $\mathcal{M}_d$ là môđun Cohen-Macaulay, có nghĩa là

$$\operatorname{reg}(K_R) = d.$$

3.2 Vành Cohen-Macaulay chính tắc

Định nghĩa 3.2.1. (Xem [14], Definition 3.1) Một R-môđun phân bậc hữu hạn sinh M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay chính tắc* nếu môđun chính tắc K_M của nó là môđun Cohen-Macaulay. Vành R xét như môđun có tính chất như vậy được gọi là *vành Cohen-Macaulay chính tắc*.

Kết quả sau cho phép chứng minh theo quy nạp.

Bổ đề 3.2.5. (Xem [14], Proposition 2.4) *Cho $x \in S_1$ là phần tử đủ tổng quát $\big($cụ thể x là phần tử lọc chính quy trên M và trên tất cả các môđun khuyết $K^i(M)\big)$. Khi đó với mọi $i \geq 0$ ta có dãy khớp*

$$0 \longrightarrow \big(K^{i+1}(M)/xK^{i+1}(M)\big)(1) \longrightarrow K^i(M/xM) \longrightarrow 0 :_{K^i(M)} x \longrightarrow 0$$

Từ bổ đề này, bằng quy nạp theo chiều d ta nhận được

Định lý 3.2.6. *Cho R là một vành tuỳ ý chiều $d \geq 2$. Khi đó*

$$a_d(K_R) \leq [(\deg R)^c - 1] \operatorname{reg}(R).$$

Hệ quả của định lý trên là

Định lý 3.2.7. *Giả sử R là vành Cohen-Macaulay chính tắc. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(K_R) \leq [(\deg R)^c - 1] \operatorname{reg}(R) + d.$$

Chương 4

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của các môđun khuyết

4.1 Chặn trên độ dài đối đồng điều địa phương

Mục đích của chương này là chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của các môđun khuyết $K^i(M)$. Vấn đề chặn trên $\operatorname{reg}(K^i(M))$ theo $\operatorname{reg}(M)$ đã được giải quyết bởi L. T. Hoa-E. Hyry cho trường hợp $M = R = S/I$ là vành thương của vành đa thức. Phương pháp của L. T. Hoa-E. Hyry [11] chưa làm được cho môđun vì khi đó bài toán chặn trên độ dài của đối đồng điều địa phương chỉ mới được giải quyết cho trường hợp $M = R$ ([10], Theorem 3.4). Do vậy mục đích của mục này là mở rộng bài toán chặn trên độ dài của đối đồng điều địa phương cho trường hợp môđun.

Đặt

$$h^i_M(t) = l(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_t).$$

Phép chứng minh các kết quả mở rộng dưới đây hoàn toàn khác với [10] và được công bố trong [5], Section 4. Ta nói rằng M là môđun phân bậc dương nếu $\operatorname{indeg}(M) \geq 0$, tức là $M = \bigoplus_{i\geq 0} M_i$.

Định lý 4.1.1. *Cho M là môđun phân bậc dương, hữu hạn sinh trên $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ với $n \geq 2$. Đặt $r = \operatorname{reg}(M)$. Giả sử $y_1, \ldots, y_d \in S_1$ là hệ tham số đủ tổng quát của M. Khi đó với mọi $i \geq 1$ ta có*

$$h^i_M(t) \leq \binom{r-1-t}{i-1} H_{M/(y_1,\ldots,y_{i-1})M}(r).$$

Định lý 4.1.3. *Cho M là môđun phân bậc dương, hữu hạn sinh trên vành đa thức n biến $S = K[x_1, \ldots, x_n]$, với $n \geq 2$. Giả sử $r = \operatorname{reg}(M)$, khi* *đó với mọi* $i \geq 1$ *ta có*

$$h^i_M(t) \leq \mu(M)\binom{r-1-t}{i-1}\binom{r+n-i}{n-i}.$$

4.2 Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của các môđun khuyết

Mục đích của toàn bộ mục này là chứng minh kết quả chính sau đây của chương:

Định lý 4.2.1. *Cho* M *là môđun phân bậc dương, hữu hạn sinh trên vành đa thức n biến* $S = K[x_1, \ldots, x_n], n \geq 2$. *Giả sử* $r = \operatorname{reg}(M)$, *ta có*

$$\operatorname{reg}(K^i(M)) < \begin{cases} 4\mu(M)(r+2)^n - 4\mu(M)(r+2)^{n-1} & \textit{nếu } i = 1, \\ [2\mu(M)(r+2)]^{n\cdots(n+i-1)2^{\frac{i(i-1)}{2}}} & \textit{nếu } i \geq 2. \end{cases}$$

Để chứng minh định lý này chúng ta cần một kết quả của M. Brodmann, C. Matteotti và N. D. Minh. Đặt

$$d^0_M(t) = H_M(t) - h^0_M(t) + h^1_M(t), \tag{4.8}$$

$$d^i_M(t) = h^{i+1}_M(t), i \geq 1. \tag{4.9}$$

Vì $K^i(M)$ là S-môđun phân bậc, hữu hạn sinh nên tồn tại đa thức $q^i_M(t)$ sao cho

$$d^i_M(t) = q^i_M(t) = P_{K^i(M)}(-t) \text{ với } t \ll 0. \tag{4.10}$$

Với $i \geq 0$, đặt

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\left(d^j_M(-j) + \mid q^j_M(-j) \mid\right). \tag{4.11}$$

Ngoài chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford ta còn xét đến chỉ số chính quy của hàm Hilbert được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.2.2. Cho M là S-môđun phân bậc hữu hạn sinh. *Chỉ số chính quy của hàm Hilbert* là số

$$ri(M) = \max\{j \in \mathbb{Z} \mid H_M(j) \neq P_M(j)\}.$$

Ta cần một số kết quả hỗ trợ sau:

Bổ đề 4.2.3. (Xem [11], Lemma 6) *Cho $y \in S_1$ là phần tử lọc chính quy của M. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(M) = \max\{\operatorname{reg}(M/yM), ri(M)\}$

(ii) *Nếu M là môđun Cohen-Macaulay chiều d thì* $\operatorname{reg}(M) = ri(M) + d$.

Để cho đơn giản, ta sẽ đặt $K^i := K^i(M)$. Hai kết quả sau đây được L. T. Hoa-E. Hyry phát biểu cho vành nhưng thực ra vẫn đúng cho môđun:

Bổ đề 4.2.4. (Xem [11], Lemma 15) *Với mọi $i \geq 1$ ta có*

$$ri(K^i) \leq [2(1+\Delta_{i-1})]^{2^{i-1}} - 2.$$

Phép chứng minh Định lý 4.2.1 là quy nạp theo i.

Trường hợp $i = 0$ là

Bổ đề 4.2.6. (Xem [11], Lemma 11)

$$\operatorname{reg}(K^0(M)) \leq -\operatorname{indeg}(M).$$

Trường hợp $i = 1$ là

Bổ đề 4.2.7. *Ta có*

$$\operatorname{reg}(K^1) < 4\mu(M)(r+2)^n - 4\mu(M)(r+2)^{n-1}.$$

Trường hợp $i = 2$ là

Bổ đề 4.2.10. *Giả sử $d \geq 3$. Khi đó*

$$\Delta_1 < \frac{1}{2}\big[2\mu(M)(r+2)\big]^{n(n+1)} - \big[\mu(M)(r+2)\big]^n - n,$$

$$\operatorname{reg}(K^2) < \big[2\mu(M)(r+2)\big]^{2n(n+1)} - 2\big[\mu(M)(r+2)\big]^n - 2n.$$

Trường hợp $i \leq d-1$ là

Bổ đề 4.2.11. *Giả sử* $1 \leq i < d-1$. *Khi đó*

$$\Delta_i < \frac{1}{2}\big[2\mu(M)(r+2)\big]^{n\cdots(n+i)2^{\frac{i(i-1)}{2}}} - [\mu(M)(r+2)]^n - n,$$

và $$\operatorname{reg}(K^{i+1}) < [2\mu(M)(r+2)]^{n\cdots(n+i)2^{\frac{i(i+1)}{2}}} - 2[\mu(M)(r+2)]^n - 2n.$$

Trường hợp $i = d$ là

Bổ đề 4.2.12. *Giả sử* $d \geq 2$. *Khi đó*

$$\operatorname{reg}(K^d) < [2\mu(M)(r+2)]^{n\cdots(n+d-1)2^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}}} - 2[\mu(M)(r+2)]^n - 2n + 2.$$

Nếu bỏ giả thiết môđun phân bậc dương, từ Định lý 4.2.1 ta dễ dàng suy ra định lý sau:

Định lý 4.2.13. *Cho* M *là môđun phân bậc, hữu hạn sinh trên vành đa thức n biến* $S = K[x_1, \ldots, x_n], n \geq 2$. *Giả sử* $r = \operatorname{reg}(M)$, *ta có*

$$\operatorname{reg}(K^i(M)) < \begin{cases} 4\mu(M)(r - \operatorname{indeg}(M) + 2)^n - 4\mu(M)\times \\ \times(r - \operatorname{indeg}(M) + 2)^{n-1} + \operatorname{indeg}(M) & \textit{nếu } i = 1, \\ [2\mu(M)(r - \operatorname{indeg}(M) + 2)]^{n\cdots(n+i-1)2^{\frac{i(i-1)}{2}}} + \\ + \operatorname{indeg}(M) & \textit{nếu } i \geq 2. \end{cases}$$

Kết luận của luận án

Tóm lại, trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

1. Đưa ra khái niệm môđun Buchsbaum dãy và k-Buchsbaum dãy.
2. Đưa ra chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc Buchsbaum dãy và môđun phân bậc k-Buchsbaum dãy.
3. Chặn trên độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương của môđun M thông qua chỉ số chính quy và số phần tử sinh của M.
4. Đưa ra chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun chính tắc và các môđun khuyết của môđun phân bậc. Khi M là môđun Buchsbaum dãy, k-Buchsbaum dãy hoặc $\mathcal{M}_d$ là môđun Cohen-Macaulay thì chúng tôi đưa ra được chặn trên tốt hơn chặn trên tổng quát. Đối với a-bất biến của môđun chính tắc ta cũng có một chặn trên tốt.

Hướng nghiên cứu chính của luận án có thể được tiếp tục đối với những lớp vành và môđun phân bậc khác như môđun phân bậc liên kết của một môđun, vành thớ, $\cdots$. Đối với môđun chiều nhỏ cần tiếp tục nghiên cứu để tìm những chặn tốt hơn nhiều.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Đ. T. Hà (2007), "Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun k-Buchsbaum dãy", *Tạp chí Khoa học các ngành Khoa học Tự nhiên, Đại học Vinh*, (1a) **36**, pp. 27-34.

[2] L. T. Hoa (1995), *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford và ứng dụng*, Luận án Tiến sĩ Khoa học, Trung Tâm Khoa Học Tự Nhiên và Công Nghệ Quốc Gia.

Tiếng Anh

[3] Bayer D., Mumford D. (1993), "What can be computed in algebraic geometry?", *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Cortona, in: Sympos. Math.*, **34**, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*,pp. 1-48.

[4] Brodmann M., Matteoti C., N. D. Minh (2003), "Bound for cohomological deficiency functions of projective schemes over Artinian rings", *Vietnam J. Math.*, **31**, pp. 71-113.

[5] Chardin M., D. T. Ha and L. T. Hoa (2008), "Castelnuovo-Mumford regularity of Ext modules and homological degree", *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).

[6] N. T. Cuong, L. T. Nhan (2003), "Pseudo Cohen-Macaulay and pseudo generalized Cohen-Macaulay modules", *J. Algebra*, **267**, pp. 156-177.

[7] Eisenbud D., Goto S. (1984), "Linear free resolutions and minimal multiplicity", *J. Algebra*, **88**, pp. 89-133.

[8] Gruson L., Lazarsfeld R., Peskine C. (1983), "On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves", *Invent. Math.*, **72**, pp. 491-506.

[9] D. T. Ha, L. T. Hoa (2008), "Castelnuovo-Mumford regularity of some modules", *Communications in Algebra*, **36**, pp. 992-1004.

[10] L. T. Hoa (2008), "Finiteness of Hilbert functions and bounds for Castelnuovo-Mumford regularity of initial ideals". *Trans. Amer. Math. Soc*, **360**, pp. 4519-4540.

[11] L. T. Hoa, Hyry E. (2006), "Castelnuovo-Mumford regularity of canonical and deficiency modules", *J. Algebra*, **305**, pp. 877-900.

[12] L. T. Hoa, Miyazaki C. (1995), "Bound on Castelnuovo-Mumford regularity for generalized Cohen-Macaulay graded rings", *Math. Ann.*, **301**, pp. 587-598.

[13] Nagel U., Schenzel P. (1998), "Degree bound for generators of cohomology modules and Castelnuovo-Mumford regularity", *Nagoya Math. J.*, **152**, pp. 153-174.

[14] Schenzel P. (2004), "On birational Macaulayfications and Cohen-Macaulay canonical modules", *J. Algebra*, **275**, pp. 751-770.

[15] St$\ddot{u}$ckrad J., Vogel W. (1987), "Castelnuovo bounds for certain subvarieties in P^n", *Math. Ann.*, **276**, pp. 341-352.

Các công trình liên quan đến luận án

1. Đ. T. Hà (2007), "Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun k-Buchsbaum dãy", *Tạp chí Khoa học các ngành Khoa học Tự nhiên, Đại học Vinh*, (1a) **36**, pp. 27-34.
2. D. T. Ha, L. T. Hoa (2008), "Castelnuovo-Mumford regularity of some modules", *Communications in Algebra*, **36**, pp. 992-1004.
3. Chardin M., D. T. Ha and L. T. Hoa (2008), "Castelnuovo-Mumford regularity of Ext modules and homological degree", *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Xêmina của Bộ môn Đại số, Khoa Toán, Đại học Vinh.

- Xêmina của Phòng Đại số và Lý thuyết số, Viện Toán học, Hà Nội.

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tô pô, Tp. Hồ Chí Minh, 11/2005.

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tô pô, Vinh, 12/2007.