**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**

− − − ⋆⋆⋆ − − −

**NGUYỄN THÀNH ANH**

# BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC TRONG MIỀN TRỤ VỚI ĐÁY KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: phương trình vi phân-tích phân
Mã số: 62 46 01 05

**TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

**Hà Nội - 2010**

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TSKH. Nguyễn Mạnh Hùng

Phản biện 1: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Phản biện 2: GS. TSKH. Lê Hùng Sơn, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Phản biện 3: PGS. TS. Nguyễn Xuân Thảo, Trường Đại học Thủy lợi

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp nhà nước họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
vào hồi giờ ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận án này tại:

- thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
- thư viện Quốc gia

# MỞ ĐẦU

## 1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Các bài toán biên đối với phương trình và hệ phương trình tuyến tính dạng elliptic, parabolic hay hyperbolic trong miền có biên trơn đã được nghiên cứu và đạt được những kết quả tương đối hoàn chỉnh.

Cho đến nay các kết quả về bài toán biên elliptic tuyến tính trong các loại miền có biên không trơn nói trên là khá phong phú và tương đối trọn vẹn bởi các công trình của V.A. Kondratiev, V.G. Maz'ya, B.A. Plamenevskii và các tác giả khác. Có thể nêu một số nét chính về các kết quả này như sau. Nghiệm của các bài toán này nói chung không trơn tại các điểm kì dị của biên, và do đó, chúng không thuộc các không gian Sobolev thông thường. Bởi vậy, điều quan trọng là mô tả được tính chất của các nghiệm này trong lân cận các điểm kì dị của biên và đưa ra các không gian Sobolev thích hợp để xét các bài toán đó.

Các bài toán biên đối với phương trình, hệ phương trình không dừng trong miền có biên không trơn cũng đã được nghiên cứu trong nhiều công trình với các loại phương trình khác nhau, trên các loại miền không trơn khác nhau và các cách tiếp cận khác nhau.

Trong luận án này, sử dụng cách tiếp cận giới thiệu cuối cùng ở trên, chúng tôi dành sự chú ý vào việc nghiên cứu bài toán biên ban đầu thứ hai (còn gọi là bài toán Cauchy- Neumann) đối với phương trình parabolic trong miền trụ với đáy là miền có biên chứa điểm nón. Tuy nhiên, chúng tôi sẽ xét bài toán với các điều kiện biên dạng tổng quát hơn, chúng chứa điều kiện biên Dirichlet và điều kiện biên Neumann như các trường hợp riêng. Bởi vậy chúng tôi đặt tên đề tài là *"Bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic trong miền trụ với đáy không trơn"*.

## 2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

Mục đích của luận án là nghiên cứu bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic trong miền trụ với đáy là miền bị chặn chứa điểm nón trên biên, bao gồm các vấn đề: tính đặt đúng của bài toán, tính chính quy của nghiệm và biểu diễn tiệm cận của nghiệm trong lân cận của điểm nón. Chúng tôi chỉ xét bài toán tuyến tính với toán tử parabolic mạnh, điều kiện biên thuần nhất và điều kiện ban đầu tổng quát.

**4. Cấu trúc và các kết quả của luận án**

Luận án gồm 3 chương:

- Chương 1 dành cho việc giới thiệu bài toán và nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán. Mục 1.1 dành cho việc giới thiệu một số kí hiệu, giả thiết và đặt bài toán. Trong mục 1.2 chúng tôi tính đặt đúng của bài toán trong không gian $\mathcal{H}_B^{m,1}(Q)$.

- Chương 2 dành cho việc nghiên cứu tính chính quy của nghiệm suy rộng theo cả biến thời gian và biến không gian. Trước hết, trong mục 2.2, chúng tôi thiết lập định lí về tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian trong không gian $H_B^{m,1}(Q)$ bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin cũng như các kết quả về tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán. Chúng ta sẽ thấy rằng tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian trong không gian $H_B^{m,1}(Q)$ không phụ thuộc vào tính trơn của biên. Tiếp theo, trong mục 2.3, chúng tôi thiết lập được tính chính quy của nghiệm suy rộng trong các không gian Sobolev có trọng $\mathfrak{W}_{2,\gamma}^{2ml,l}(G_T)$ và $\mathcal{W}_{2,\gamma}^{2ml,l}(G_T)$. Trong khi tính chính quy của nghiệm suy rộng trong không gian Sobolev có trọng $\mathfrak{W}_{2,\gamma}^{2ml,l}(G_T)$ chỉ phụ thuộc vào tính chính quy của các dữ kiện cùng với điều kiện phù hợp giữa chúng thì tính chính quy của nghiệm suy rộng trong không gian Sobolev có trọng $\mathcal{W}_{2,\gamma}^{2ml,l}(G_T)$ còn phụ thuộc vào điều kiện về phổ của bó toán tử tương ứng với bài toán. Ý tưởng chính được dùng trong chương này là chuyển số hạng chứa đạo hàm theo biến thời gian của ẩn hàm sang vế phải và coi bài toán toán như là bài toán biên elliptic phụ thuộc tham số. Sau đó sử dụng các kết quả về tính chính quy của nghiệm của bài toán elliptic trong miền với biên chứa điểm nón và kết quả về tính chính quy của nghiệm suy rộng theo biến thời gian để nhận được các kết quả mong muốn.

- Trong Chương 3 chúng tôi nghiên cứu việc biểu diễn tiệm cận nghiệm suy rộng trong lân cận của điểm nón. Ý tưởng chính của chương này là sử dụng các kết quả về biểu diễn của nghiệm của bài toán elliptic trong lân cận của điểm nón. Trước hết, chúng tôi nghiên cứu tính chính quy của các hàm giá trị riêng và các hàm vectơ riêng của bó toán tử tương ứng với bài toán trong mục 3.2. Trong phần đầu của mục 3.3, chúng tôi nghiên cứu biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán biên elliptic phụ thuộc tham số trong không gian Sobolev có trọng kiểu "V". Kế đó, trong phần cuối của mục 3.3, sử dụng các kết quả này và kết quả về tính chính quy của nghiệm chúng tôi thiết lập biểu diễn tiệm cận nghiệm suy rộng của bài toán biên ban đầu đang xét trong lân cận của điểm nón. Chúng tôi dành mục 3.4 để trình bày các bài toán biên mẫu đối với phương trình parabolic cấp hai trong miền góc. Ở đó chúng tôi tính toán tường minh các hàm giá trị riêng và các hàm vectơ riêng của bó toán tử tương ứng với bài toán. Các kết quả này được sử dụng để xây dựng công thức biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic cấp hai trong miền trụ với đáy là đa giác cong, được chúng tôi xét trong mục 3.5 như một ví dụ của các kết quả tổng quát của luận án.

**5. Ý nghĩa của các kết quả của luận án**

Các kết quả của luận án góp phần hoàn thiện lí thuyết định tính các bài toán biên không dừng nói chung và các bài toán biên không dừng trong miền không trơn nói riêng. Các kết quả này có thể được dùng trong quá trình xây dựng các lược đồ giải số các bài toán biên đối với phương trình parabolic trong miền trụ với đáy không trơn. Một số ý tưởng và phương pháp được dùng trong luận án có thể dùng để nghiên cứu các bài toán biên không dừng khác.

Nội dung chính của luận án này đã được được báo cáo tại:

- Hội nghị Quốc tế về giải tích trừu tượng và ứng dụng lần thứ 2 (ICAAA), Quy nhơn - 2005.

- Hội nghị - Đại hội Toán học Toàn quốc, Quy nhơn - 2008.

- Hội nghị khoa học Khoa Toán -Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2008.

# Chương 1
# TÍNH GIẢI ĐƯỢC DUY NHẤT CỦA BÀI TOÁN

Mục đích chính của chương này là giới thiệu bài toán và nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán. Sự duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp năng lượng đánh giá tiên nghiệm; trong khi sự tồn tại nghiệm được chứng minh bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin. Kết quả chính của chương này là Định lí 1.2.2. Nội dung chính của chương này được viết dựa trên phần đầu của các bài báo số 1, 2, 3 trong danh mục các công trình của tác giả.

## 1.1 Đại cương và phát biểu bài toán

Giả sử $G$ là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ với biên $\partial G$. Ta giả sử $S = \partial G \setminus \{0\}$ một đa tạp trơn và $G$ trong một lân cận của gốc tọa độ 0 trùng với nón $K = \{x : x/|x| \in \Omega\}$ trong đó $\Omega$ một miền trên hình cầu đơn vị $\mathbb{S}^{n-1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Giả sử $T$ là một số thực dương hoặc $T = +\infty$. Với mỗi $t \in (0, +\infty)$, đặt $G_t = G \times (0, t)$, $S_t = S \times (0, t)$, $Q = G_\infty = G \times (0, +\infty)$, và $\Gamma = S_\infty = S \times [0, +\infty)$.

Giả sử

$$L = L(x, t, \partial_x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t)\, \partial_x^\beta) \tag{1.1}$$

là một toán tử vi phân bậc $2m$ tự liên hợp hình thức. Giả sử

$$B_j = B_j(x, t, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \mu_j} b_{j\alpha}(x,t) \partial_x^\alpha, j = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

là một hệ của các toán tử (vi phân) biên trên $S_T$. Ta giả sử $\operatorname{ord} B_j = \mu_j \leqslant m - 1$ với $j = 1, \ldots, J$, và $m \leqslant \operatorname{ord} B_j = \mu_j \leqslant 2m - 1$ với $j = J + 1, \ldots, m$, và giả thiết rằng các hệ số của $B_j$ không phụ thuộc $t$ nếu $\operatorname{ord} B_j < m$. Giả thiết rằng các hệ số của các toán tử $L$ và $B_j$ có đạo hàm mọi cấp bị chặn trên $\overline{G_T}$. Giả sử rằng $\{B_j(x, t, \partial_x)\}_{j=1}^m$ là một hệ chuẩn tắc trên $S_T$ và đẳng thức tích phân sau

$$B(t, u, v) = \int_G Lu\overline{v}dx + \sum_{j=1}^{J} \int_S \Phi_j u \overline{B_j v} ds + \sum_{j=J+1}^{m} \int_S B_j u \overline{\Phi_j v} ds$$

đúng với mọi $u, v \in C^\infty(\overline{G})$ và hầu khắp $t \in [0, T]$, trong đó $\Phi_j, j = 1, \ldots, m$, các toán tử biên trên $S$ và

$$B(t, u, v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=0}^{m} \int_G a_{\alpha\beta}(., t)\, \partial_x^\beta u \overline{\partial_x^\alpha v} dx.$$

Ta kí hiệu

$$H_B^m(G) = \Big\{u \in W_2^m(G) : B_j u = 0 \text{ trên } S \text{ với } j = 1, \ldots, J\Big\}$$

với chuẩn vốn có trong $W_2^m(G)$. Bởi $H_B^{-m}(G)$ ta kí hiệu không gian đối ngẫu của $H_B^m(G)$. Ta viết $\langle ., . \rangle$ để kí hiệu dạng đối ngẫu giữa $H_B^m(G)$ và $H_B^{-m}(G)$, và $(., .)$ để kí hiệu tích vô hướng trong $L_2(G)$. Trong luận án này ta giả thiết $B(t, u, v)$ là $H_B^m(G)-$elliptic đều theo $t \in [0, T]$, nghĩa là, bất đẳng thức $B(t, u, u) \geqslant \varrho_0 \|u\|^2_{W_2^m(G)}$ đúng với mọi $u \in H_B^m(G)$ và mọi $t \in [0, T]$.

Giả sử $X, Y$ là các không gian Banach. Ta kí hiệu bởi $W_2^1(0, T; X, Y)$ không gian bao gồm các hàm $u \in L_2(0, T; X)$ sao cho đạo hàm suy rộng $u_t = u'$ tồn tại và thuộc $L_2(0, T; Y)$. Chuẩn trong $W_2^1(0, T; X, Y)$ xác định bởi $\|u\|_{W_2^1(0,T;X,Y)} = \big(\|u\|^2_{L_2(0,T;X)} + \|u_t\|^2_{L_2(0,T;Y)}\big)^{\frac{1}{2}}$. Để các kí hiệu được ngắn gọn, ta đặt

$$\begin{gathered}
H^{l,0}(G_T) = L_2(0, T; W_2^l(G)),\ H^{l,1}(G_T) = W_2^1(0, T; W_2^l(G), L_2(G)),\\
H_B^{m,0}(G_T) = L_2(0, T; H_B^m(G)),\ H_B^{m,1}(G_T) = W_2^1(0, T; H_B^m(G), L_2(G)),\\
H_B^{-m,0}(G_T) = L_2(0, T; H_B^{-m}(G)),\\
H_B^{-m,1}(G_T) = W_2^1(0, T; H_B^{-m}(G), L_2(G)),\\
\mathcal{H}_B^{m,1}(G_T) = W_2^1(0, T; H_B^m(G), H_B^{-m}(G)),\\
\mathcal{H}_B^{-m,1}(G_T) = W_2^1(0, T; H_B^{-m}(G), H_B^{-m}(G)).
\end{gathered}$$

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu trong luận này là bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic sau

$$u_t + Lu = f \quad \text{trong } G_T, \tag{1.3}$$

$$B_j u = 0, \quad \text{trên } S_T, j = 1, \ldots, m, \tag{1.4}$$

$$u|_{t=0} = \phi \quad \text{trên } G. \tag{1.5}$$

**Định nghĩa 1.1.1** Giả sử $f \in H_B^{-m,0}(G_T), \phi \in L_2(G)$. Hàm $u \in \mathcal{H}_B^{m,1}(Q)$ gọi là nghiệm suy rộng của bài toán (1.3)- (1.5) nếu $u(.,0) = \phi$ và đẳng thức

$$\langle u_t, \overline{v}\rangle + B(t,u,v) = \langle f(.,t), \overline{v}\rangle \tag{1.6}$$

đúng với hầu khắp $t \in (0,T)$ và mọi $v \in H_B^m(G)$.

## 1.2 Tính giải được duy nhất của bài toán

Trong bài này chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán (1.3)- (1.5). Sự duy nhất nghiệm được chứng minh bằng phương pháp đánh giá năng lượng. Còn sự tồn tại được chứng minh bằng phương pháp Galerkin.

**Bổ đề 1.2.1** *Giả sử $F(t,.,.)$ là một dạng song tuyến tính trên $H_B^m(G)$ $\times H_B^m(G)$ thỏa mãn $|F(t,v,w)| \leqslant C\|v\|_{H_B^m(G)}\|w\|_{H_B^m(G)}$ $(C = \text{ const })$ với mọi $t \in [0,+\infty)$ và $v,w \in H_B^m(G)$, và $F(.,v,w)$ là đo được $[0,+\infty)$ với mỗi cặp $v,w \in H_B^m(G)$. Giả sử $u \in \mathcal{H}_B^{m,1}(Q)$ thỏa $u(.,0) = 0$ và*

$$\langle u_t(.,t), \overline{v}(.,t)\rangle + B(t,u(.,t),v(.,t)) = \int_0^t F(\theta,u(.,\theta),\overline{v}(.,t))d\theta$$

*với hầu khắp nơi $t \in [0,+\infty)$ và mọi hàm $v$ xác định trên $Q$, $v \in H_B^{m,0}(G_\tau)$ với $\tau$ là số dương bất kì. Khi đó $u \equiv 0$ trên $Q$.*

**Định lí 1.2.2** *Nếu $f \in H_B^{-m,0}(Q), \phi \in L_2(G)$ thì bài toán (1.3)- (1.5) tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng $u \in \mathcal{H}_B^{m,1}(Q)$ thỏa mãn*

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}_B^{m,1}(Q)} \leqslant C\big(\|\phi\|^2_{L_2(G)} + \|f\|^2_{H_B^{-m,0}(Q)}\big), \tag{1.7}$$

*trong đó $C$ là hằng số không phụ thuộc $\phi, f$ và $u$.*

# Chương 2
# TÍNH CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu tính chính quy của nghiệm suy rộng của bài toán theo biến thời gian trong không gian

$H_B^{m,1}(Q)$ và tính chính quy theo các biến không gian và thời gian trong các không gian Sobolev có trọng. Tính chính quy theo biến thời gian được chứng minh bằng cách kết hợp các kết quả về tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán, phương pháp xấp xỉ Galerkin trên cùng với phương pháp quy nạp toán học. Để xét chính quy theo các biến không gian và thời gian trong các không gian Sobolev có trọng, phương pháp chính là chuyển số hạng chứa đạo hàm theo biến thời gian của ẩn hàm sang vế phải và coi bài toán nhận được như là bài toán biên elliptic phụ thuộc tham số. Sau đó sử dụng các kết quả về tính chính quy của nghiệm của bài toán elliptic trong miền với biên chứa điểm nón và kết quả về tính chính quy của nghiệm suy rộng theo biến thời gian của chương trước để nhận được các kết quả mong muốn. Kết quả chính của chương này là Định lí 2.2.3, Định lí 2.3.4 và Định lí 2.3.6. Nội dung chính của chương này được viết dựa theo phần sau của các bài báo số 1, 2, 3 trong danh mục các công trình của tác giả.

## 2.1 Đại cương

Kí hiệu bởi $V^l_{2,\gamma}(G)$, $W^l_{2,\gamma}(G)$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ các không gian Sobolev có trọng với các chuẩn $\|u\|_{V^l_{2,\gamma}(G)} = \big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} \int_G r^{2(\gamma+|\alpha|-l)}|\partial^\alpha_x u|^2 dx\big)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\|_{W^l_{2,\gamma}(G)} = \big(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} \int_G r^{2\gamma}|\partial^\alpha_x u|^2 dx\big)^{\frac{1}{2}}$. Nếu $l \geqslant 1$, $V^{l-\frac{1}{2}}_{2,\gamma}(S), W^{l-\frac{1}{2}}_{2,\gamma}(S)$ kí hiệu lần lượt các không gian vết của hàm thuộc $V^l_{2,\gamma}(G), W^l_{2,\gamma}(G)$ trên biên $S$. Bởi $W^h_2((0,T);X)$ ta kí hiệu không gian Sobolev của các hàm nhận giá trị trong không gian Banach $X$ xác định trên $(0,T)$ với chuẩn $\|f\|_{W^h_2((0,T);X)} = \Big(\sum\limits_{k=0}^{h} \int_0^T \|\frac{d^k f(t)}{dt^k}\|^2_X dt\Big)^{\frac{1}{2}}$. Để các kí hiệu ngắn gọn, ta đặt

$$W^h_2((0,T)) = W^h_2((0,T);\mathbb{C}), W^{l,h}_2(\Omega_T) = W^h_2((0,T);W^l_2(\Omega)),$$

$$V^{l,h}_{2,\gamma}(G_T) = W^h_2((0,T);V^l_{2,\gamma}(G)), V^{l-\frac{1}{2},h}_{2,\gamma}(S_T) = W^h_2((0,T);V^{l-\frac{1}{2}}_{2,\gamma}(\partial G)),$$

$$W^{l,h}_{2,\gamma}(G_T) = W^h_2((0,T);W^l_{2,\gamma}(G)), W^{l-\frac{1}{2},h}_{2,\gamma}(S_T) = W^h_2((0,T);W^{l-\frac{1}{2}}_{2,\gamma}(\partial G)).$$

Cuối cùng kí hiệu bởi $\mathfrak{W}^{2ml,l}_{2,\gamma}(G_T), \mathcal{W}^{2ml,l}_{2,\gamma}(G_T)$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ các không gian Sobolev có trọng,

$$\|u\|_{\mathfrak{W}^{2ml,l}_{2,\gamma}(G_T)} = \left(\int_{G_T}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|+2mk\leqslant 2ml\\ k<l}} r^{2\gamma-2km}|\partial^\alpha_x u_{t^k}|^2 + \sum_{k=0}^{l}|u_{t^k}|^2\Big)dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{\mathcal{W}^{2ml,l}_{2,\gamma}(G_T)} = \left(\int_{G_T}\Big(\sum_{|\alpha|+2mk\leqslant 2ml} r^{2\gamma}|\partial^\alpha_x u_{t^k}|^2 + \sum_{k=0}^{l}|u_{t^k}|^2\Big)dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 2.2 Tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian

**Bổ đề 2.2.1** *Giả sử $\phi \in H^m_B(G)$ và $f \in L_2(Q)$. Khi đó nghiệm suy rộng $u$ trong $\mathcal{H}^{m,1}_B(Q)$ của bài toán (1.3)- (1.5) thực tế thuộc $H^{m,1}_B(Q)$ và bất đẳng thức sau*

$$\|u\|^2_{H^{m,1}_B(Q)} \leqslant C\ \left(\|\phi\|^2_{H^m_B(G)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right) \tag{2.1}$$

*đúng với hằng số $C$ không phụ thuộc $g, f$, và $u$.*

**Bổ đề 2.2.2** *Giả sử $\phi \in H^m_B(G)$ và $f \in \mathcal{H}^{-m,1}_B(Q)$. Khi đó nghiệm suy rộng $u$ trong $\mathcal{H}^{m,1}_B(Q)$ của bài toán (1.3)- (1.5) thực tế thuộc $H^{m,1}_B(Q)$ và bất đẳng thức sau*

$$\|u\|^2_{H^{m,1}_B(Q)} \leqslant C\ \left(\|\phi\|^2_{H^m_B(G)} + \|f\|^2_{\mathcal{H}^{-m,1}_B(Q)}\right) \tag{2.2}$$

*đúng với hằng số $C$ không phụ thuộc $g, f$, và $u$.*

Giả sử $\phi \in W^{(2h+1)m}_{2,loc}(G), f \in \mathcal{W}^{2hm,h}_{2,loc}(Q)$, trong đó $h$ một số nguyên dương. Ta đặt $\phi_0 := \phi$, $\phi_1 := f(.,0) - L(x,0,\partial_x)\phi_0, \ldots, \phi_h := f_{t^{h-1}}(.,0) - \sum_{k=0}^{h-1}\binom{h-1}{k}L_{t^{h-1-k}}(x,0,\partial_x)\phi_k$. Ta nói điều kiện phù hợp bậc $h$ đối với bài toán (1.3)-(1.5) thỏa mãn nếu các hàm $\phi_0, \dots, \phi_{h-1}$ thuộc $W^{2m}_{2,loc}(G)$ và

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (B_j)_{t^{s-k}}(x, 0, \partial_x)\phi_k|_S = 0, s = 0, \dots, h-1, j = 1, \dots, m.$$

**Định lí 2.2.3** *Giả sử $h$ là một số nguyên không âm. Giả sử $\phi \in W^{(2h+1)m}_{2,loc}(G)$, $f \in \mathcal{W}^{2hm,h}_{2,loc}(Q)$ sao cho $\phi_k \in W^m_2(G)$, $f_{t^k} \in L_2(Q)$ với $k = 0, \dots, h$ và, nếu $h \geqslant 1$, điều kiện phù hợp bậc $h$ đối với bài toán (1.3)- (1.5) thỏa mãn. Khi đó nghiệm suy rộng $u \in \mathcal{H}^{m,1}_B(Q)$ của bài toán (1.3)- (1.5) thỏa mãn $u_{t^k} \in H^{m,1}_B(Q)$ với $k = 0, \dots, h$, và*

$$\sum_{k=0}^{h} \|u_{t^k}\|^2_{H^{m,1}_B(Q)} \leqslant C \sum_{k=0}^{h} \Big( \|\phi_k\|^2_{W^m_2(G)} + \|f_{t^k}\|^2_{L_2(Q)} \Big), \tag{2.3}$$

*trong đó $C$ là hằng số không phụ thuộc vào $u, f, \phi$.*

## 2.3 Tính chính quy của nghiệm trong không gian Sobolev có trọng

Trong mục này chúng tôi sẽ thiết lập định lí về tính chính quy của nghiệm suy rộng của bài toán trong không gian có trọng $\mathfrak{W}^{2ml,l}_{2,\gamma}(Q)$. Trước hết chúng tôi đưa ra một số bổ đề bổ trợ.

**Bổ đề 2.3.1** *Giả sử $u \in W^l_{2,\gamma}(G)$ với $0 < \gamma + \dfrac{n}{2} \leqslant l$. Khi đó với số nguyên bất kì $k \geqslant 0$, $u$ có thể viết được $u = v + w$, trong đó $v \in V^l_{2,\gamma}(G)$ và $w \in W^{l+k}_{2,\gamma+k}(G)$, hơn nữa,*

$$\|v\|^2_{V^l_{2,\gamma}(G)} + \|w\|^2_{W^{l+k}_{2,\gamma+k}(G)} \leqslant C\|u\|^2_{W^l_{2,\gamma}(G)} \tag{2.4}$$

*với hằng số $C$ không phụ thuộc $u$.*

*Hơn nữa, nếu giả thiết thêm rằng $u|_S \in V^{l-q-\frac{1}{2}}_{2,\gamma-q}(S)$, $q$ là một số nguyên bé hơn $l$, $l \geqslant 1$, thì $u|_S \in V^{l-\frac{1}{2}}_{2,\gamma}(S)$.*

**Bổ đề 2.3.2** *Giả sử* $u \in W_2^m(G) \cap W_{2,loc}^{2m}(G)$ *là một nghiệm của bài toán*

$$L(x,t_0,\partial_x)u = f \qquad \textit{trong } G, \tag{2.5}$$

$$B_j(x,t_0,\partial_x)u = g_j \qquad \textit{trên } S, \qquad j=1,\dots,m. \tag{2.6}$$

*với* $f \in W_{2,m}^0(G)$, $g_j \in W_{2,m}^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}}(S)$ *Khi đó* $u \in W_m^{2m}(G)$ *và*

$$\|u\|^2_{W_m^{2m}(G)} \leqslant C\big(\|f\|^2_{W^0_{2,m}(G)} + \sum_{j=1}^m \|g_j\|_{W_{2,m}^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}}(S)} + \|u\|^2_{W_2^m(G)}\big),$$

*trong đó hằng số* $C$ *là không phụ thuộc* $u, f$ *và* $t_0$.

**Bổ đề 2.3.3** *Giả sử* $l, s$ *là các số nguyên không âm,* $l \geqslant 2m$, *và* $\gamma$ *là một số thực. Giả sử* $u \in W_{2,\gamma}^{l,0}(Q)$ *là nghiệm của bài toán sau*

$$L(x,t,\partial_x)u = f \quad \textit{trong } Q, \tag{2.7}$$

$$B_j(x,t,\partial_x)u = g_j \quad \textit{trên } \Gamma, j=1,\dots,m. \tag{2.8}$$

*Khi đó nếu* $f \in W_{2,\gamma+s}^{l-2m+s,0}(Q), g \in W_{2,\gamma+s}^{l-\mu_j-\frac{1}{2}+s,0}(\Gamma)$ *thì* $u \in W_{2,\gamma+s}^{l+s,0}(G)$ *và*

$$\|u\|^2_{W_{2,\gamma+s}^{l+s,0}(G)} \leqslant C\big(\|f\|^2_{W_{2,\gamma+s}^{l-2m+s,0}(Q)} + \|g\|^2_{W_{2,\gamma+s}^{l-\mu_j-\frac{1}{2}+s,0}(\Gamma)} + \|u\|^2_{W_{2,\gamma}^{l,0}}(G)\big)$$

*với hằng số* $C$ *không phụ thuộc* $u, f, g$.

Bây giờ là lúc chúng tôi đưa ra định lí chính của mục này.

**Định lí 2.3.4** *Giả sử* $h$ *là một số nguyên không âm và các giả thiết của Định lí 2.2.3 thỏa mãn. Giả thiết thêm rằng* $f \in \mathfrak{W}_{2,(2h+1)m}^{2hm,h}(Q)$. *Khi đó nghiệm suy rộng* $u \in \mathcal{H}^{m,1}(Q)$ *của bài toán (1.3)- (1.5) thuộc* $\mathfrak{W}_{2,(2h+1)m}^{(2h+2)m,h+1}(Q)$. *Hơn nữa ta có đánh giá*

$$\|u\|^2_{\mathfrak{W}_{2,(2h+1)m}^{(2h+2)m,h+1}(Q)} \leqslant C\Big(\sum_{k=0}^h \|\phi_k\|^2_{W_2^m(G)} + \|f\|^2_{\mathfrak{W}_{2,(2h+1)m}^{2hm,h}(Q)}\Big),$$

*trong đó* $C$ *là hằng số không phụ thuộc* $u, f, \phi$.

Trong phần còn lại của mục này chúng tôi sẽ thiết lập định lí về tính chính quy của nghiệm suy rộng của bài toán trong không gian có trọng $\mathcal{W}_{2,\gamma}^{2ml,l}(Q)$. Những kết quả này là mạnh hơn so với những kết quả của mục trước. Tuy nhiên, chúng chỉ đạt được nhờ giả thiết về phổ của bó toán tử tương ứng với bài toán.

Trước hết ta giới thiệu về bó toán tử tương ứng với bài toán. Giả sử $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t, \partial_x), \mathfrak{B}_j = \mathfrak{B}_j(t, \partial_x)$ phần chính của $L(x, t, \partial_x), B_j(x, t, \partial_x)$ tại $x = 0$. Bởi vậy ta có thể viết $\mathfrak{L}(t, \partial_x), \mathfrak{B}_j(t, \partial_x)$ dưới dạng

$$\mathfrak{L}(t, \partial_x) = r^{-2m}\mathscr{L}(\omega, t, \partial_\omega, r\partial_r), \mathfrak{B}_j(t, \partial_x) = r^{-\mu_j}\mathscr{B}_j(\omega, t, \partial_\omega, r\partial_r).$$

Ta đặt $\mathscr{U}(\lambda, t) = (\mathscr{L}(\omega, t, \partial_\omega, \lambda), \mathscr{B}_j(\omega, t, \partial_\omega, \lambda))$ với $\lambda \in \mathbb{C}, t \in [0, T]$ và gọi là bó toán tử tương ứng với bài toán (1.3)-(1.5).

**Bổ đề 2.3.5** *Giả sử $u \in W_{2,\gamma}^{l,0}(Q)$ là một nghiệm của bài toán*

$$L(x, t, \partial_x)u = f \quad \textit{trong } Q \tag{2.9}$$

$$B_j(x, t, \partial_x)u = g_j \quad \textit{trên } \Gamma, j = 1, \ldots, m, \tag{2.10}$$

*trong đó $f \in W_{2,\delta}^{k-2m,0}(Q), g_j \in W_{2,\delta}^{k-\mu_j-\frac{1}{2},0}(\Gamma)$, $l, k$ là một số nguyên $\geqslant 2m$, $k - \delta > l - \gamma$, $\gamma + \dfrac{n}{2} \notin \{1, \ldots, l\}$, $\delta + \dfrac{n}{2} \notin \{1, \ldots, k\}$. Giả sử dải $-\gamma + l - \dfrac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant -\delta + k - \dfrac{n}{2}$ không chứa giá trị riêng nào của $\mathscr{U}(\lambda, t)$ với mọi $t \in (0, +\infty)$. Khi đó $u \in W_{2,\delta}^{k,0}(Q)$ và*

$$\|u\|^2_{W_{2,\delta}^{k,0}(Q)} \leqslant C\big(\|f\|^2_{W_{2,\delta}^{k-2m,0}(Q)} + \sum_{j=1}^{m}\|g_j\|^2_{W_{2,\delta}^{k-\mu_j-\frac{1}{2},0}(\Gamma)} + \|u\|^2_{W_{2,\gamma}^{l,0}(Q)}\big) \tag{2.11}$$

*với hằng số $C$ không phụ thuộc $u, f, g_j$.*

Sau đây là định lí chính của mục này.

**Định lí 2.3.6** *Giả sử $h$ là một số nguyên không âm và các giả thiết của Định lí 2.2.3 thỏa mãn. Giả thiết thêm rằng $0 \leqslant \gamma \leqslant m$, $\gamma + \dfrac{n}{2} \notin \{1, \ldots, 2(h+1)m\}$ và $f \in \mathcal{W}_{2,\gamma}^{2hm,h}(Q)$. Hơn nữa giả sử dải $m - \dfrac{n}{2} \leqslant$*

$\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma + 2hm + 2m - \dfrac{n}{2}$ *không chứa giá trị riêng nào của* $\mathcal{U}(\lambda, t)$ *với mọi* $t \in (0, +\infty)$. *Khi đó nghiệm suy rộng* $u \in \mathcal{H}^{m,1}(Q)$ *của bài toán (1.3)- (1.5) thuộc* $\mathcal{W}^{2(h+1)m,h+1}_{2,\gamma}(Q)$ *và*

$$\|u\|^2_{\mathcal{W}^{2(h+1)m,h+1}_{2,\gamma}(Q)} \leqslant C\Big(\sum_{k=0}^{h} \|\phi_k\|^2_{W^m_2(G)} + \|f\|^2_{\mathcal{W}^{2hm,h}_{2,\gamma}(Q)}\Big), \quad (2.12)$$

*trong đó* $C$ *là hằng số không phụ thuộc vào* $u, f, \phi$.

# CHƯƠNG 3
# BIỂU DIỄN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Mục đích chính của chương này là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm suy rộng trong lân cận của điểm nón. Phương pháp chính dùng để nghiên cứu là sử dụng các kết quả về nhiễu giải tích của các toán tử tuyến tính, tuyến tính hóa các bó toán tử phụ thuộc đa thức và các kết quả về biểu diễn của nghiệm của bài toán elliptic trong lân cận của điểm nón. Kết quả chính của chương này là Định lí 3.3.3 và Định lí 3.3.4. Để đạt được các kết quả này, Định lí 3.2.5 và Bổ đề 3.3.1 là những kết quả quan trọng. Nội dung chính của chương này được viết dựa theo công trình số 5, riêng hai mục 3.4, 3.5 chúng tôi dựa theo công trình số 4 trong danh mục các công trình của tác giả.

## 3.1 Đại cương

Giả sử $X, Y$ là các không gian Banach. Ta xét bó toán tử

$$\mathscr{U}(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} A_j \lambda^j \quad (3.1)$$

trong đó $A_j \in \mathcal{L}(X, Y)$, $j = 0, \dots, l$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Nếu $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\varphi_0 \in X$ sao cho $\varphi_0 \neq 0, \mathscr{U}(\lambda_0)\varphi_0 = 0$, thì $\lambda_0$ được gọi là một giá trị riêng của $\mathscr{U}(\lambda)$ và $\varphi_0 \in X$ được gọi là một vectơ riêng tương ứng với $\lambda_0$. $\Lambda = \dim\ker\mathscr{U}(\lambda_0)$ được gọi là bội hình học của giá trị riêng $\lambda_0$. Hạng của vectơ riêng $\varphi_0$, kí hiệu bởi $\operatorname{rank}\varphi_0$, là độ dài cực đại của các xích Jordan tương ứng với vectơ riêng $\varphi_0$. Tổng các hạng của một hệ các vectơ riêng tạo thành một cơ sở của $\ker \mathscr{U}(\lambda_0)$ gọi là bội đại số (hay gọi ngắn gọn là bội) của giá trị riêng $\lambda_0$. Một giá trị riêng có bội đại số bằng bội hình học (các bội riêng đều bằng 1) thì gọi là giá trị riêng bán đơn (semi-simple). Một giá trị riêng bán đơn thì chỉ có các vectơ riêng mà không có vectơ riêng suy rộng tương ứng với nó.

Giả sử $A \in \mathcal{L}(X)$. Các khái niệm giới thiệu ở trên (giá trị riêng, vectơ riêng, vectơ suy rộng, bội hình học, bội đại số, xích Jordan, hệ chính tắc các xích Jordan) của bó toán tử $\lambda I - A$ còn được gọi là của toán tử $A$.

Kí hiệu bởi $C^{\mathfrak{a}}([0,T];X)$ tập các hàm giá trị trong $X$ xác định và giải tích trên $[0,T]$. Ta nói rằng $f \in C^{\infty,\mathfrak{a}}(\overline{D}_T)$ nếu $f \in C^{\mathfrak{a}}([0,T];C^l(D))$ với mọi số nguyên không âm $l$. Trong chương này, chúng tôi giả thiết thêm rằng: các hệ số của toán tử $L(x,t,\partial_x)$ thuộc lớp $C^{\infty,\mathfrak{a}}(\overline{G}_T)$ và các hệ số của các toán tử biên $B_j = B_j(x,t,\partial_x)$ thuộc lớp $C^{\infty,\mathfrak{a}}(\partial G \times [0,T])$.

## 3.2 Giá trị riêng và các hàm riêng của bó toán tử tương ứng với bài toán

Trong mục này chúng tôi sẽ nghiên cứu tính trơn theo $t$ của các hàm giá trị riêng và các hàm vectơ riêng của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda,t)$.

**Định nghĩa 3.2.1** Một hàm giá trị phức $\lambda(t)$ xác định và liên tục trên một khoảng con $\mathcal{R}$ nào đó của $[0,T]$ sao cho $\lambda(t)$ là giá trị riêng của toán tử $A(t)$ với mọi $t \in \mathcal{R}$ được gọi là một hàm giá trị riêng của họ toán tử $A(t)$.

Hàm giá trị riêng $\lambda(t)$ được gọi là có bội không đổi nếu các bội hình học, bội riêng và bội đại số của $\lambda(t_1)$ và $\lambda(t_2)$ tương ứng bằng nhau với mọi $t_1, t_2 \in \mathcal{R}$. Khi đó bội của $\lambda(t_1)$ cũng được gọi là bội của hàm giá trị riêng $\lambda(t)$.

Hàm giá trị riêng $\lambda(t)$ được gọi là bán đơn (tương ứng, đơn) nếu $\lambda(t)$ là giá trị riêng bán đơn (tương ứng, đơn) của toán tử $A(t)$ với mỗi $t \in \mathcal{R}$.

**Định nghĩa 3.2.2** Giả sử $\lambda(t)$ là một hàm giá trị riêng của họ toán tử $A(t)$ xác định trên $\mathcal{R} \subset [0,T]$. Một hàm $\varphi(t)$ xác định trên $\mathcal{R}$ nhận giá trị trong $X$ được gọi là một hàm vectơ riêng của họ toán tử $A(t)$ tương ứng với hàm giá trị riêng $\lambda(t)$ nếu, với mỗi $t \in \mathcal{R}$, $\varphi(t)$ là vectơ riêng của toán tử $A(t)$ tương ứng với giá trị riêng $\lambda(t)$.

**Định nghĩa 3.2.3** Giả sử $\lambda(t)$ là một hàm giá trị riêng của họ toán tử $A(t)$ xác định trên $\mathcal{R} \subset [0, T]$. Một hệ $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_\Lambda(t)$ các hàm xác định trên $\mathcal{R}$ nhận giá trị trong $X$ được gọi là một hệ chính tắc các hàm vectơ riêng của họ toán tử $A(t)$ tương ứng với hàm giá trị riêng $\lambda(t)$ nếu với mỗi $t \in [0, T]$, $\{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_\Lambda(t)\}$ là một hệ chính tắc các vectơ riêng của toán tử $A(t)$ tương ứng với giá trị riêng $\lambda(t)$.

Bằng cách thay họ toán tử $A(t)$ bởi bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$, ta có các khái niệm hàm giá trị riêng, tính đơn, bán đơn và tính bội không đổi của hàm giá trị riêng, khái niệm hàm vectơ riêng và hệ chính tắc các hàm vectơ riêng của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$.

**Bổ đề 3.2.4** *Giả sử $A(t) \in C^{\alpha}([0, T]; \mathcal{L}(X))$. Giả sử $\mathcal{D}_0$ là một miền con liên thông trong $\mathbb{C}$ sao cho với mỗi $t \in [0, T]$, $\partial\mathcal{D}_0 \cap \rho(A(t)) = \emptyset$ và $\mathcal{D}_0 \cap \rho(A(t))$ là tập hữu hạn các giá trị riêng có bội hữu hạn của $A(t)$. Khi đó:*

*(i) Tồn tại các hàm giá trị phức $\lambda_k(t)$, $k = 1, \ldots, N$, liên tục trên $[0, T]$ sao cho $\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)\}$ là tập tất cả các giá trị riêng của toán tử $A(t)$ trong $\mathcal{D}_0$ với mọi $t \in [0, T]$ (Nghĩa là các giá trị riêng của họ toán tử $\mathscr{A}(t)$ có thể sắp xếp để trở thành $N$ hàm giá trị riêng xác định trên toàn đoạn $[0, T]$).*

*(ii) Nếu giả thiết thêm rằng các hàm giá trị riêng trên có đồ thị không cắt nhau từng đôi một (điều này tương đương với mỗi hàm giá trị riêng đó có bội không đổi) thì các hàm này giải tích trên $[0, T]$.*

*(iii) Nếu giả thiết thêm nữa rằng các hàm giá trị riêng trên là bán đơn thì tồn tại một hệ chính tắc các hàm vectơ riêng $\varphi_{kj}(t), j = 1, \ldots, \Lambda_k$, của họ toán tử $A(t)$ tương ứng với hàm giá trị riêng $\lambda_k(t)$ $(k = 1, \ldots, N)$ gồm các hàm thuộc $C^{\alpha}([0, T], X)$.*

Định lí sau đây là quan trọng để thiết lập tính trơn theo thời gian của các hàm trong biểu diễn của nghiệm sau này.

**Định lí 3.2.5** *Giả sử $\gamma_1, \gamma_2$ là các số thực, $\gamma_1 < \gamma_2$, sao cho trên các đường $\operatorname{Re}\lambda = \gamma_j$, $j = 1, 2$, không chứa giá trị riêng nào của bó toán* *tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *với mọi* $t \in [0, T]$ *và dải*

$$\mathcal{D}_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \gamma_1 < \operatorname{Re} \lambda < \gamma_2\} \tag{3.2}$$

*chứa ít nhất một giá trị riêng của* $\mathscr{U}(\lambda, t_0)$ *với* $t_0 \in [0, T]$ *nào đó. Giả sử thêm rằng các hàm giá trị riêng của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *trong* $\mathcal{D}_1$ *có bội không đổi và bán đơn. Khi đó tồn tại các hàm số* $\lambda_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, *giải tích trên* $[0, T]$ *sao cho* $\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)\}$ *là tập tất cả các giá trị riêng của toán tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *trong dải* $\mathcal{D}_1$. *Hơn nữa, với mỗi* $k \in \{1, \dots, N\}$, *tồn tại một hệ chính tắc các hàm vectơ riêng*

$$\varphi_{kj}(\omega, t), j = 1, \dots, \Lambda_k,$$

*của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *tương ứng với giá trị riêng* $\lambda_k(t)$ *gồm các hàm thuộc lớp* $C^{\infty, \mathfrak{a}}(\overline{\Omega}_T)$.

## 3.3 Biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán trong lân cận điểm nón

**Bổ đề 3.3.1** *Giả sử* $u \in V_{2,\gamma_1}^{l_1,h}(G_T)$ *là một nghiệm của bài toán*

$$\mathfrak{L}(t, \partial_x)u = f \quad \text{trong } G_T, \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{B}_j(t, \partial_x)u = g_j \quad \text{trên } S_T, j = 1, \dots, m, \tag{3.4}$$

*trong đó* $f \in V_{2,\gamma_2}^{l_2-2m,h}(G_T)$, $g_j \in V_{2,\gamma_2}^{l_2-\mu_j-\frac{1}{2},h}(S_T)$, $l_1, l_2 \geqslant 2m$, $\gamma_1 - l_1 > \gamma_2 - l_2$. *Giả sử rằng các đường* $\operatorname{Re} \lambda = -\gamma_i + l_i - \dfrac{n}{2}$ $(i = 1, 2)$ *không chứa các giá trị riêng của* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *với mọi* $t \in [0, T]$, *và các hàm giá trị riêng nằm trong dải*

$$-\gamma_1 + l_1 - \frac{n}{2} < \operatorname{Re} \lambda < -\gamma_2 + l_2 - \frac{n}{2}$$

*của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *là bán đơn và không giao nhau (hay có bội không đổi). Khi đó có một lân cận* $V$ *của gốc tọa độ của* $\mathbb{R}^n$ *sao cho trong* $V_T$ *nghiệm* $u$ *có biểu diễn*

$$u(x, t) = \sum_{\mu=1}^{N} r^{\lambda_\mu(t)} \sum_{k=1}^{\Lambda_\mu} c_{\mu k}(t) \varphi_{\mu k}(\omega, t) + w(x, t), \tag{3.5}$$

*trong đó* $w \in V^{l_2,h}_{2,\gamma_2}(K_T)$, $c_{\mu k}(t) \in W^h_2((0,T))$, $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)$ *là các hàm giá trị riêng của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda,t)$ *xác định trên* $[0,T]$ *như kết quả của Định lí 3.2.5,* $\Lambda_\mu$ *là bội của hàm giá trị riêng* $\lambda_\mu(t)$,

$$\varphi_{\mu k}(\omega,t), k = 1, \ldots, \Lambda_\mu,$$

*là một hệ chính tắc các hàm vectơ riêng của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda,t)$ *tương ứng với hàm giá trị riêng* $\lambda_\mu(t)$ *gồm các hàm thuộc* $C^{\infty,\mathfrak{a}}(\overline{\Omega}_T)$.

**Bổ đề 3.3.2** *Giả sử*

$$f = r^{\lambda_0(t)-2m}\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma f_{s-\sigma}, \tag{3.6}$$

$$g_j = r^{\lambda_0(t)-\mu_j}\sum_{\sigma=0}^{s}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma g_{j,s-\sigma}, j = 1, \ldots, m, \tag{3.7}$$

*trong đó* $f_\sigma \in W^{l-2m,h}_2(\Omega_T)$, $g_{j,\sigma} \in W^{l-\mu_j-\frac{1}{2},h}_2(\partial\Omega_T)$, $\sigma = 0, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, m$. *Giả sử rằng nếu* $\lambda_0(t)$ *là giá trị riêng của* $\mathscr{U}(\lambda,t)$ *với một* $t$ *nào đó, thì nó là một hàm giá trị riêng bán đơn với bội không đổi của* $\mathscr{U}(\lambda,t)$ *xác định trên* $[0,T]$. *Khi đó có một nghiệm* $u$ *của bài toán (3.3), (3.4) có dạng*

$$u = r^{\lambda_0(t)}\sum_{\sigma=0}^{s+\kappa}\frac{1}{\sigma!}(\ln r)^\sigma u_{s+\kappa-\sigma} \tag{3.8}$$

*trong đó* $u_\sigma \in W^{l,h}_2(\Omega_T), \sigma = 0, \ldots, s+\kappa$. *Ở đây* $\kappa = 1$ *hoặc* $\kappa = 0$ *tùy theo* $\lambda_0(t)$ *có là một hàm giá trị riêng của* $\mathscr{U}(\lambda,t)$ *hay không.*

**Định lí 3.3.3** *Giả sử* $u \in V^{l_1,h}_{2,\gamma_1}(G_T)$ *là một nghiệm của bài toán*

$$L(x,t,\partial_x)u = f \quad \text{trong } G_T, \tag{3.9}$$

$$B_j(x,t,\partial_x)u = g_j \quad \text{trên } S_T, j = 1, \ldots, m, \tag{3.10}$$

*trong đó* $f \in V^{l_2-2m,h}_{2,\gamma_2}(G_T)$, $g_j \in V^{l_2-\mu_j-\frac{1}{2},h}_{2,\gamma_2}(S_T)$, $l_1, l_2, h$ *là các số nguyên không âm,* $l_1, l_2 \geqslant 2m$, $l_1 - \gamma_1 < l_2 - \gamma_2$. *Giả sử rằng có các số thực* $\delta_0, \delta_2, \ldots, \delta_M$ *sao cho*

$$\delta_0 = \gamma_1 + l_2 - l_1, \delta_M = \gamma_2, 0 < \delta_{d-1} - \delta_d \leqslant 1, d = 1, \ldots, M,$$

*và các đường*

$$\operatorname{Re}\lambda = -\delta_d + l_2 - \frac{n}{2}, d = 0, \ldots, M,$$

*không chứa các giá trị riêng của bó* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *với mọi* $t \in [0, T]$, *còn các hàm giá trị riêng nằm trong dải*

$$-\delta_0 + l_2 - \frac{n}{2} < \operatorname{Re}\lambda < -\delta_M + l_2 - \frac{n}{2}$$

*của bó toán tử* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *đều bán đơn và không giao nhau (hay có bội không đổi). Gọi* $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_N(t)$ *là các hàm giá trị riêng xác định trên* $[0, T]$ *của* $\mathscr{U}(\lambda, t)$ *nằm trong dải đó. Giả sử thêm rằng nếu* $\lambda_j(t_0) = \lambda_k(t_0) + s$ *với* $j, k \in \{1, \ldots, N\}$, *với số nguyên* $s$ *và* $t_0 \in [0, T]$, *thì* $\lambda_j(t) = \lambda_k(t) + s$ *với mọi* $t \in [0, T]$. *Khi đó nghiệm* $u$ *có biểu diễn*

$$u = \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\tau=0}^{\ell_\mu} r^{\lambda_\mu(t)+\tau} P_{\mu,\tau}(\ln r) + w, \tag{3.11}$$

*trong đó* $w \in V^{l_2,h}_{2,\gamma_2}(G_T)$, $P_{\mu,\tau}$ *là các đa thức với các hệ số thuộc* $W^{l_2,h}_2(\Omega_T)$, $\ell_\mu$ *là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn* $-\gamma_2 - \lambda_\mu(t) - 1 + l_2 - \dfrac{n}{2}$ *với mọi* $t \in [0, T]$.

Sau đây là định lí về biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán biên ban đầu (1.3)-(1.5) trong lân cận của điểm nón.

**Định lí 3.3.4** *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.3.4 thỏa mãn và* $u \in \mathcal{H}^{m,1}_B(Q)$ *là nghiệm suy rộng của bài toán (1.3)- (1.5). Giả thiết có các số thực* $\delta_0, \delta_2, \ldots, \delta_M$ *sao cho*

$$\delta_0 \geqslant \max(m, 2m - \frac{n}{2}), \delta_M \geqslant 0, 0 < \delta_{d-1} - \delta_d \leqslant 1, d = 1, \ldots, M,$$

*và các đường*

$$\operatorname{Re}\lambda = -\delta_d + 2m - \frac{n}{2}, d = 0, \ldots, M,$$

*không chứa các giá trị riêng của bó $\mathscr{U}(\lambda, t)$ với mọi $t \in [0, T]$, còn các hàm giá trị riêng nằm trong dải*

$$-\delta_0 + 2m - \frac{n}{2} < \operatorname{Re}\lambda < -\delta_M + 2m - \frac{n}{2}$$

*của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$ đều bán đơn và không giao nhau (hay có bội không đổi). Gọi $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$ là các hàm giá trị riêng xác định trên $[0, T]$ của $\mathscr{U}(\lambda, t)$ nằm trong dải đó. Giả thiết thêm rằng nếu $\lambda_j(t_0) = \lambda_k(t_0) + s$ với $j, k \in \{1, \dots, N\}$, với số nguyên $s$ và $t_0 \in [0, T]$, thì $\lambda_j(t) = \lambda_k(t) + s$ với mọi $t \in [0, T]$.*

*Khi đó $u$ có biểu diễn*

$$u = \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\tau=0}^{\ell_\mu} r^{\lambda_\mu(t)+\tau} P_{\mu,\tau}(\ln r) + w, \tag{3.12}$$

*trong đó $w \in V^{2m,h}_{2,\delta_M}(G_T)$, $P_{\mu,\tau}$ là các đa thức với các hệ số thuộc $W^{2m,h}_2(\overline{\Omega}_T)$, $\ell_\mu$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn $-\delta_M - \lambda_\mu(t) - 1 + 2m - \dfrac{n}{2}$ với mọi $t \in [0, T]$.*

## 3.4 Bài toán biên mẫu cho toán tử cấp hai trong miền góc

Trong mục này chúng tôi xét các bài toán biên mẫu cấp hai hai biến trong miền góc; chúng tương ứng với trường hợp toán tử $L(x, t, \partial_x)$ của bài toán biên ban đầu (1.3)- (1.5) là toán tử cấp hai với hai biến không gian và miền $G$ là một miền con bị chặn của $\mathbb{R}^2$ chứa điểm góc. Chúng tôi sẽ tính toán tường minh các hàm giá trị riêng và các hàm vectơ riêng của $\mathscr{U}(\lambda, t)$; từ đó khảo sát dễ dàng về bội của các hàm giá trị riêng cũng như tính chính quy của các hàm giá trị riêng và các hàm vectơ riêng theo biến $t$. Bởi vậy, có thể coi đây các ví dụ minh họa cho các kết quả tổng quát được trình bày phía trước.

Xét miền góc $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \omega < \omega_0\}$. Đặt $S^0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = 0\}$, $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = \omega_0\}$, $S^j_T = S^j \times [0, T], j = 0, 1$.

Xét toán tử vi phân $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(t, \partial_x) = -(\partial_{x_2} - a(t)\partial_{x_1})(\partial_{x_2} - \overline{a(t)}\partial_{x_1})$, trong đó $a(t) = (\alpha(t) + i\beta(t))$, $\alpha(t), \beta(t)$ là các hàm thực xác định trên $[0, T]$, $\beta(t) \geqslant \varrho_3$ với mọi $t \in [0, T]$, trong đó $\varrho_3$ là hằng số dương nào đó.

### 3.4.1 Bài toán biên Dirichlet

Trong tiểu mục này ta xét bài toán biên Dirichlet phụ thuộc tham số:

$$\mathfrak{L}(t, \partial_x)u = f \text{ trong } K_T, \tag{3.13}$$

$$u = g_j \text{ trên } \quad S_T^j, j = 0, 1. \tag{3.14}$$

**Mệnh đề 3.4.1** *Giả sử hàm $a(t)$ thuộc lớp $C^h([0, T])$, trong đó $h$ là một số tự nhiên. Khi đó các hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$ tương ứng với bài toán (3.13), (3.14) xác định bởi công thức $\lambda_k(t) = \dfrac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0, t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; các hàm giá trị riêng này là đơn và thuộc lớp $C^h([0, T])$. Các hàm vectơ riêng tương ứng được cho bởi công thức $\varphi_k(\omega, t) = e^{\frac{k \operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \sin \frac{k \operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; chúng là khả vi vô hạn theo biến $\omega$ và khả vi liên tục $h$ lần theo biến $t$. Ở đây*

$$\operatorname{Re}\vartheta(\omega, t) = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_j^2(\omega, t) + 1}{\tan^2(\omega) + 1} + \ln \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}$$

*và*

$$\operatorname{Im}\vartheta(\omega, t) = \begin{cases} \arctan Z(\omega, t) - \arctan \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)}, & \omega \in (0, \frac{\pi}{2}], \\ \arctan Z(\omega, t) - \arctan \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} + 2\pi, & \omega \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ \arctan Z(\omega, t) - \arctan \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} + 4\pi, & \omega \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), \end{cases}$$

*trong đó*

$$Z(\omega, t) = \frac{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}{\beta(t)} \tan\omega + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}.$$

### 3.4.2 Bài toán biên Neumann

Trong tiểu mục này chúng tôi xét bài toán biên ellipic phụ thuộc tham số với điều kiện biên Neumann:

$$\mathfrak{L}(t, \partial_x)u = f \text{ trong } G_T, \tag{3.15}$$

$$N_j(t, \partial_x)u = g_j \text{ trên } S_T^j, j = 0, 1, \tag{3.16}$$

$N_j(t, \partial_x)u = \partial_{x_2} u.\nu_2^j - \alpha(t)\partial_{x_1} u.\nu_2^j - \alpha(t)\partial_{x_2}.\nu_1^j + (\alpha^2(t) + \beta^2(t))\partial_{x_1}.\nu_1^j$, $\nu^j = (\nu_1^j, \nu_2^j)$ là trường vectơ đơn vị pháp tuyến ngoài trên $S_T^j$, $j = 0, 1$.

**Mệnh đề 3.4.2** *Giả sử hàm $a(t)$ thuộc lớp $C^h([0, T])$, trong đó $h$ là một số tự nhiên. Khi đó*

*1) Các hàm giá trị riêng khác hàm đồng nhất bằng 0 của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$ tương ứng với bài toán (3.15), (3.16) xác định bởi $\lambda_k(t) = \dfrac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0, t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; các hàm giá trị riêng này là đơn và thuộc lớp $C^h([0, T])$. Các hàm vectơ riêng tương ứng được cho bởi $\varphi_k(\omega, t) = e^{\frac{k \operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \cos \frac{k \operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; chúng là khả vi vô hạn theo biến $\omega$ và khả vi liên tục $h$ lần theo biến $t$.*

*2) $\lambda(t) \equiv 0$ là một hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda, t)$ với hàm vectơ riêng tương ứng $u_0 = 1$. Nếu đẳng thức $M(\omega_0, t)\alpha(t) = -N(\omega_0, t)$ không đúng với mọi $t \in [0, T]$ thì hàm giá trị riêng này là đơn. Nếu đẳng thức này đúng với mọi $t \in [0, T]$ thì $\lambda(t) \equiv 0$ là hàm giá trị riêng có bội không đổi 2 với hàm vectơ riêng suy rộng $u_1 = 1 + \alpha(t)\omega$.*

### 3.4.3 Bài toán biên hỗn hợp Dirichlet-Neumann

Trong tiểu mục này chúng tôi xét bài toán biên ellipic phụ thuộc tham số với điều kiện biên hỗn hợp Dirichlet - Neumann:

$$\mathfrak{L}(t, \partial_x)u = f \text{ trong } G_T, \tag{3.17}$$

$$u = g_0 \text{ trên } S_T^0 \tag{3.18}$$

$$N_1(t, \partial_x)u = g_1 \text{ trên } S_T^1. \tag{3.19}$$

**Mệnh đề 3.4.3** *Giả sử hàm $a(t)$ thuộc lớp $C^h([0,T])$, trong đó $h$ là một số tự nhiên. Khi đó các hàm giá trị riêng của bó toán tử $\mathscr{U}(\lambda,t)$ tương ứng với bài toán (3.17)- (3.19) xác định bởi $\lambda_k(t) = \dfrac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; các hàm giá trị riêng này là đơn và thuộc lớp $C^h([0,T])$. Các hàm vectơ riêng tương ứng được cho bởi công thức $\varphi_k(\omega,t) = e^{\frac{(k+\frac{1}{2})\operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \sin\frac{(k+\frac{1}{2})\operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; chúng là khả vi vô hạn theo biến $\omega$ và khả vi liên tục $h$ lần theo biến $t$.*

## 3.5 Xét bài toán đối với phương trình parabolic cấp hai trong miền trụ với đáy là miền đa giác cong

Trong mục này, sử dụng các tính toán trong mục trước đối với các bài toán biên mẫu, chúng tôi xét bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic cấp hai trong miền trụ với đáy miền chứa điểm góc trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ như là ví dụ của các kết quả tổng quát được trình bày trong phần trước của luận án.

Trong mục này ta xét $G$ là một miền đa giác cong với các đỉnh $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$ và các cạnh $\Gamma^\tau$ (nối hai điểm $x^{(\tau)}$ và $x^{(\tau+1)}$ với $x^{(d+1)} = x^{(1)}$). Giả sử thêm rằng với mỗi điểm $x^{(\tau)}$, $\tau = 1, \ldots, d$, tồn tại một lân cận $U^\tau$ sao cho $G \cap U^\tau = K^\tau \cap U^\tau$, trong đó $K^\tau$ là một miền góc có đỉnh tại $x^{(\tau)}$ có độ mở $\omega_0^{(\tau)}$ với $0 < \omega_0^{(\tau)} < 2\pi, \omega_0^{(\tau)} \neq \pi$.

Giả sử $L(t, \partial_x) = \mathfrak{L}(t, \partial_x)$ xác định trong mục 3.4. Ta xét bài toán biên ban đầu sau

$$u_t + L(t, \partial_x)u = f \text{ trong } G_T, \tag{3.20}$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \Gamma^\tau_T, \tau \in \mathcal{D}, \tag{3.21}$$

$$N^\tau u = 0 \quad \text{trên } \Gamma^\tau_T, \tau \in \mathcal{N}, \tag{3.22}$$

$$u|_{t=0} = \phi \quad \text{trên } G, \tag{3.23}$$

trong đó $\mathcal{D}, \mathcal{N} \subset \{1, \ldots, d\}$, $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \{1, \ldots, d\}$ và $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

Lúc này đóng vai trò như $H^m_B(G)$, $\mathcal{H}^{m,1}_B(G_T)$ lần lượt là $H^1_{\mathcal{D}}(G) = \{u \in H^1(G) : u|_{\Gamma^\tau_T} = 0, \tau \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{H}^{1,1}_{\mathcal{D}}(G_T) = W^1_2(0,T; H^1_{\mathcal{D}}(G), H^{-1}_{\mathcal{D}}(G))$.

Điều kiện phù hợp bậc $h$ đối với bài toán (1.3)-(1.5) là: các hàm $\phi_0, \dots, \phi_{h-1}$ thuộc $W^2_{2,loc}(G)$ và

$$\begin{aligned} &\phi_s|_{\Gamma^\tau} = 0 \text{ nếu } \tau \in \mathcal{D}, \\ &\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} N^\tau_{t^{s-k}}(x,0,\partial_x)\phi_k|^\tau_\Gamma = 0 \text{ nếu } \tau \in \mathcal{N} \end{aligned} \quad (s = 0, \dots, h-1). \tag{3.24}$$

Giả sử gốc tọa độ là một đỉnh của $G$. Ta nói đỉnh 0 thuộc loại Dirichlet nếu $\{1, d\} \subset \mathcal{D}$, thuộc loại Neumann nếu $\{1, d\} \subset \mathcal{N}$, thuộc loại Dirichlet-Neumann nếu $1 \in \mathcal{D}$ và $d \in \mathcal{N}$.

Giả sử $h$ là một số nguyên không âm, hàm $a(t)$ thuộc lớp $C^h([0,T])$, và $u \in \mathcal{H}^{1,1}_{\mathcal{D}}(G_T)$ là nghiệm suy rộng của bài toán (3.20) - (3.23). Giả sử $\phi \in W^{2h+1}_{2,loc}(G)$, $f \in \mathcal{W}^{2h,h}_{2,loc}(G_T)$ sao cho $\phi_k \in W^1_2(G)$, $f_{t^k} \in L_2(G_T)$ for $k = 0, \dots, h$, and và điều kiện phù hợp (3.24) đúng nếu $h \geqslant 1$.

**Hệ quả 3.5.1** *Giả sử đỉnh* 0 *thuộc loại Dirichlet, và* $\beta$ *là một số thực sao cho* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *và* $\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} \neq 1 - \beta$ *với mọi số nguyên* $k \neq 0$. *Kí hiệu* $\mathcal{K}$ *là tập tất cả các số nguyên dương* $k$ *sao cho* $\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} < 1 - \beta$ *với mọi* $t \in [0,T]$. *Khi đó, trong lân cận của điểm* 0, $u$ *có biểu diễn*

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathcal{K}} c_k(t) r^{\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} e^{\frac{k \operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \sin \frac{k \operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_k \in W^h_2((0,T))$, $k \in \mathcal{K}$.

*Đặc biệt, nếu* (3.20) *là phương trình truyền nhiệt cổ điển, tức là* $L = -\Delta$, *và* $\frac{(1-\beta)\omega_0}{\pi}$ *không nguyên thì, trong lân cận của điểm* 0,

$$u(x,t) = \sum_{0 < k < (1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi}} c_k(t) r^{\frac{k\pi}{\omega_0}} \sin \frac{k\pi\omega}{\omega_0} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_k \in W^h_2((0,T))$, $0 < k < (1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi}$.

**Hệ quả 3.5.2** *Giả sử đỉnh* 0 *thuộc loại Dirichlet-Neumann, và* $\beta$ *là một số thực sao cho* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *và* $\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} \neq 1 - \beta$ *với mọi số nguyên* $k$. *Kí hiệu* $\mathcal{K}$ *là tập tất cả các số nguyên không âm* $k$ *sao cho*

$\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} < 1-\beta$ *với mọi* $t \in [0,T]$. *Khi đó,* $u$ *có biểu diễn trong lân cận của điểm* 0

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathcal{K}} c_k(t) r^{\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} e^{\frac{(k+\frac{1}{2})\operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \sin\frac{(k+\frac{1}{2})\operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_k \in W^h_2((0,T))$, $k \in \mathcal{K}$.

*Đặc biệt, nếu* (3.20) *là phương trình truyền nhiệt cổ điển, tức là* $L = -\Delta$, *và* $\frac{(1-\beta)\omega_0}{\pi} - \frac{1}{2}$ *không nguyên thì, trong lân cận của điểm* 0,

$$u(x,t) = \sum_{0\leqslant k<(1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi}-\frac{1}{2}} c_k(t) r^{\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\omega_0}} \sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi\omega}{\omega_0} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_k \in W^h_2((0,T))$, $0 \leqslant k < (1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi} - \frac{1}{2}$.

**Hệ quả 3.5.3** *Giả sử đỉnh* 0 *thuộc loại Neumann, và* $\beta$ *là một số thực sao cho* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *và* $\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} \neq 1-\beta$ *với mọi số nguyên. Giả sử hệ thức* $M(\omega_0,t)\alpha(t) = -N(\omega_0,t)$ *đúng hoặc không đúng với mọi* $t \in [0,T]$. *Kí hiệu* $\mathcal{K}$ *là tập tất cả các số nguyên dương* $k$ *sao cho* $\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} < 1-\beta$ *với mọi* $t \in [0,T]$. *Khi đó* $u$ *có biểu diễn trong lân cận của điểm* 0

$$u(x,t) = c_0(t) + c_{0,1}(t)(1+\alpha(t)\omega)\ln r + \sum_{k\in\mathcal{K}} c_k(t) r^{\frac{k\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} e^{\frac{k\operatorname{Re}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)}} \cos\frac{k\operatorname{Im}\vartheta(\omega,t)\pi}{\operatorname{Im}\vartheta(\omega_0,t)} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_0, c_{0,1}, c_k \in W^h_2((0,T))$, $k \in \mathcal{K}$, $c_{0,1} \equiv 0$ *nếu* $M(\omega_0,t)\alpha(t) \neq -N(\omega_0,t)$ *với mọi* $t \in [0,T]$.

*Đặc biệt, nếu* (3.20) *là phương trình truyền nhiệt cổ điển, tức là* $L = -\Delta$, *và* $\frac{(1-\beta)\omega_0}{\pi}$ *không nguyên thì, trong lân cận của điểm* 0,

$$u(x,t) = c_0(t) + c_{0,1}(t)\ln r + \sum_{0<k<(1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi}} c_k(t) r^{\frac{k\pi}{\omega_0}} \cos\frac{k\pi\omega}{\omega_0} + w(x,t),$$

*ở đó* $w \in V^{2,h}_{2,\beta}(G_T)$, $c_0, c_{0,1}, c_k \in W^h_2((0,T))$, $0 < k < (1-\beta)\frac{\omega_0}{\pi}$.

# KẾT LUẬN

Trong luận án này chúng tôi xét bài toán biên ban đầu đối với phương trình parabolic trong miền trụ với đáy chứa điểm nón. Các kết quả chính của luận án:

- Thiết lập được sự tồn tại duy nhất nghiệm suy rộng của bài toán trong không gian $\mathcal{H}_B^{m,1}(Q)$ và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm suy rộng theo các dữ kiện vế phải và điều kiện ban đầu.
- Thiết lập được tính chính quy của nghiệm suy rộng theo biến thời gian trong không gian $H_B^{m,1}(Q)$ và tính chính quy của nghiệm suy rộng theo hai biến không-thời gian trong các không gian Sobolev có trọng.
- Thiết lập được biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán elliptic phụ thuộc tham số trong lân cận điểm kì dị của biên. Từ đó vận dụng để thiết lập biểu diễn tiệm cận của nghiệm của bài toán biên ban đầu parabolic trong lân cận điểm kì dị đó.

Sư tồn tại duy nhất nghiệm và tính chính quy của nghiệm theo biến thời gian được chứng minh bằng các phương pháp phổ biến và chuẩn mực là phương pháp xấp xỉ Galerkin, các phương pháp năng lượng đánh giá tiên nghiệm và các phương pháp của giải tích hàm. Tính chính quy của nghiệm theo biến bất kì và biểu diễn tiệm cận của nghiệm trong lân cận của điểm conic được thiết lập bằng cách đưa bài toán về bài toán elliptic phụ thuộc tham số cũng như xây dựng các không gian hàm phù hợp.

# DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ


1. Nguyen Manh Hung and Nguyen Thanh Anh (2008), The Cauchy -Neumann problem for parabolic equations in domains with conical points, *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol. 12, No. 7 (2008), 1849-1865.

2. Nguyen Manh Hung and Nguyen Thanh Anh (2008), Regularity of solution of the second initial boundary value problem for parabolic equations in domains with conical points, *Proceedings of Voronezh State University, Series: Physics, mathematics*, No. 1( 2008), 170-178.

3. Nguyen Manh Hung and Nguyen Thanh Anh (2008), Regularity of solutions of initial boundary value problems for parabolic equations in domains with conical points, *Journal Differential Equations* 245 (2008), 1801-1818.

4. Nguyen Manh Hung and Nguyen Thanh Anh (2008), Spectral properties of the operator pencils generated by second order elliptic boundary-value problems depending on a parameter in an angle, *Journal of Science of Hanoi National University of Education*, Vol. 53, No. 5 (2008), 31-40.

5. Nguyen Manh Hung and Nguyen Thanh Anh (2009), Asymptotics of solutions of parameter-depending elliptic boundary value problems in domains with conical points, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2009(2009), No. 125, pp. 1–21.