ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
----------------------📖------------------------

VÕ THỊ NHƯ QUỲNH

TOÁN TỬ SQUARING TRONG NGHIÊN CỨU ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU CỦA ĐẠI SỐ STEENROD VÀ ĐỒNG CẤU LANNES – ZARATI

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 62 46 05 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI – 2010

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. Nguyễn Hữu Việt Hưng

Phản biện 1: PGS. TS. Nguyễn Sum, Trường Đại học Quy Nhơn

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Việt Dũng, Viện Toán học,
Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện 3: TS. Lê Minh Hà, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
Đại học Quốc gia Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp nhà nước chấm luận án tiến sĩ họp tại:

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội

hồi 9 giờ 00 ngày 08 tháng 06 năm 2010

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thông tin – Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

MỞ ĐẦU

Phân loại đồng luân các ánh xạ liên tục giữa hai mặt cầu (có thể có số chiều khác nhau) là bài toán trung tâm của Tôpô đại số kể từ năm 1930, khi H. Hopf tìm ra các ánh xạ không tầm thường, ngày nay mang tên ông:

$$\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, \quad \mathbb{S}^7 \to \mathbb{S}^4, \quad \mathbb{S}^{15} \to \mathbb{S}^8.$$

Các ánh xạ Hopf này quan hệ mật thiết với cấu trúc đại số thực có phép chia của trường số phức, thể quaternion, và đại số Cayley.

Một trong những công cụ cơ bản để nghiên cứu bài toán phân loại đồng luân là các toán tử Steenrod, được ký hiệu là $Sq^i : H^*(X; \mathbb{F}_2) \to H^{*+i}(X; \mathbb{F}_2)$, với $i \geq 0$, tác động tự nhiên trên đối đồng điều của không gian tôpô X với hệ số $\mathbb{F}_2$. Các toán tử Sq^i được Steenrod xây dựng năm 1947. Đến năm 1952, ông mở rộng kết quả này cho đối đồng điều hệ số trong $\mathbb{F}_p$ với p là một số nguyên tố lẻ.

Các toán tử Steenrod cho phép nhận biết sự khác nhau của các không gian mà cấu trúc vành đối đồng điều không thể nhìn thấy. Lược sử việc phát hiện ra các toán tử này được tóm tắt như sau. Bằng cách dùng đồng điều, người ta đã phân loại được các đa tạp 2 chiều, compact, liên thông, định hướng được. Cụ thể, mọi đa tạp như thế đều đồng phôi với một xuyến với g "lỗ" M^g, hay mặt cầu được gắn g "quai", với $g \geq 0$ nào đó. Trong thập niên 1940, Pontrjagin viết một số bài báo đưa ra khẳng định tương tự cho những đa tạp 3 chiều, compact, liên thông, định hướng được. Nhưng sau đó, người ta tìm thấy các phản ví dụ cho điều này: tồn tại những đa tạp ba chiều như thế có cùng vành đối đồng điều nhưng không đồng phôi với nhau. Steenrod phát hiện ra rằng nguyên nhân của sự kiện đó là có những toán tử Sq^i thực hiện việc kết nối các phần tử đối đồng điều của những đa tạp đã cho theo những cách khác nhau.

Đại số sinh bởi các Sq^i ($i \geq 0$) với phép cộng và phép hợp thành các toán tử thông thường được gọi là đại số Steenrod (môđulô 2), và được ký hiệu là $\mathcal{A}$. Cấu trúc của đại số này, sau đó, được làm sáng tỏ hơn bởi Adem, Cartan, Serre, và Milnor. Cụ thể, đại số Steerod (môđulô 2) là đại số tenxơ trên các Sq^i môđulô các quan hệ Adem:

$$Sq^a Sq^b = \sum_{k=0}^{[\frac{a}{2}]} \binom{b-1-k}{a-2k} Sq^{a+b-k} Sq^k, (0 < a < 2b).$$

Tác động của các toán tử Steenrod lên tích đối đồng điều thỏa mãn công thức Cartan:

$$Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} Sq^i(x) Sq^{k-i}(y).$$

Trên cơ sở nghiên cứu bài toán xác định đối đồng điều môđulô 2 của các không gian Eilenberg-Mac Lane, Serre (1953) chỉ ra rằng đại số Steenrod là đại số của tất cả các toán tử đối đồng điều *ổn định* (theo nghĩa "giao hoán với phép treo") trên phạm trù các không gian tôpô. Milnor (1958) thu được những kết quả đẹp và bất ngờ về đại số Steenrod khi ông khảo sát nó như là một đại số Hopf. Nói riêng, ông chứng minh rằng đối ngẫu của đại số Steenrod là một đại số đa thức với những phần tử sinh được xác định tường minh.

Adams (1958) đã xây dựng một dãy phổ, sau này mang tên ông, với trang E_2 là đối đồng điều của đại số Steenrod $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ và hội tụ đến thành phần 2-xoắn của nhóm đồng luân ổn định của mặt cầu $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$. Kể từ sau công trình đó, việc xác định $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ trở thành một trong các bài toán quan trọng hàng đầu của lý thuyết đồng luân ổn định. $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ được nghiên cứu tập trung và sâu sắc từ năm 1960 (bởi Adams, Wang, May, Tangora, Lin, Lin-Mahowald và rất nhiều tác giả khác). Tuy nhiên, cho đến nay, nó vẫn còn là một đối tượng khó hiểu. Bài toán xác định $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ vẫn còn mở đối với $s \geq 5$.

Nhằm nghiên cứu $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ thông qua lý thuyết bất biến, Singer (1989) xây dựng đồng cấu chuyển

$$Tr_s : \mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{s,s+*}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2),$$

trong đó $B\mathbb{V}_s$ là không gian phân loại của nhóm 2-abel sơ cấp hạng s, và $PH_*(B\mathbb{V}_s)$ là không gian con của $H_*(B\mathbb{V}_s)$ gồm các phần tử bị triệt tiêu bởi mọi toán tử Steenrod bậc dương. Ông chỉ ra rằng Tr_s là một đồng cấu rất thực chất (không tầm thường). Nói riêng, Tr_s là một đẳng cấu với $s = 1, 2$ và $Tr := \oplus_s Tr_s$ là một đồng cấu đại số. Năm 1991, Boardman khẳng định thêm giá trị của đồng cấu chuyển khi chứng minh Tr_3 cũng là một đẳng cấu. Từ đó, đồng cấu chuyển đại số Tr được kỳ vọng là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu đối đồng điều của đại số Steenrod. Đặc biệt, Singer đưa ra giả thuyết sau đây.

Giả thuyết 1. (W. M. Singer) *Đồng cấu chuyển Tr_s là một đơn cấu với mọi s.*

Singer xây dựng đồng cấu chuyển Tr_s hoàn toàn bằng công cụ đại số. Sau đó, ông chỉ ra rằng Tr_s là ánh xạ cảm sinh bởi đồng cấu chuyển hình học $tr_s : \pi_*((B\mathbb{V}_s)_+) \to \pi_*(\mathbb{S}^0)$ trên trang E_2 của dãy phổ Adams.

Nhận xét rằng không gian đối ngẫu của thành phần $PH_*(B\mathbb{V}_s)$ chính là $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_s$, trong đó P_s là đại số đa thức trên s biến, mỗi biến có bậc bằng 1. Bài toán xác định một cơ sở cho không gian véctơ phân bậc $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_s$ (hay là xác định một hệ sinh tối thiểu của P_s xem như một $\mathcal{A}$-môđun) chính là nội dung bài toán "hit" đã thu hút nhiều nhà nghiên cứu Tôpô đại số (như Peterson, Singer, Wood, Priddy, Kameko, Alghamdi-Crabb-Hubbuck, N. H. V. Hưng, T. N. Nam, L. M. Hà, N. Sum...).

Liulevicius (1962) có lẽ là người đầu tiên phát hiện ra rằng tồn tại các toán tử $Sq^i : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s+i,2(s+d)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ tác động trên đối đồng điều của đại số Steenrod có hầu hết các tính chất của toán tử Steenrod tác động trên đối đồng điều của không gian tôpô. Tuy nhiên, điểm khác biệt là $Sq^0 : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,2(s+d)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ không là ánh xạ đồng nhất. Ngày nay, nó được gọi là *toán tử squaring cổ điển*. Trong khi giải bài toán "hit" với $s \leq 3$, Kameko (1990) xây dựng một dạng tương tự của toán tử squaring cổ điển trên miền xác định của đồng cấu chuyển:

$$Sq^0 : (\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s))_d \longrightarrow (\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s))_{2d+s}.$$

Thật ra, trong công trình kể trên, Kameko không ký hiệu toán tử này là Sq^0, và cũng không nhận ra mối liên hệ của nó với toán tử squaring cổ điển. Sau đó, Boardman (1993) và Minami (1999) chỉ ra rằng, toán tử nói trên, sau này được gọi là *toán tử squaring Kameko*, giao hoán với toán tử

Sq^0 trên $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$ qua đồng cấu chuyển $Tr_s : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2) \to \mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s)$.

Nhóm tuyến tính tổng quát GL_s tác động chính qui trên $\mathbb{V}_s$, và do đó, trên $H^*(B\mathbb{V}_s)$ cũng như trên $H_*(B\mathbb{V}_s)$. Hơn nữa, tác động các của $\mathcal{A}$ và của GL_s trên $H_*(B\mathbb{V}_s)$ giao hoán với nhau. Do đó, tác động chính qui của $\mathcal{A}$ trên $H_*(B\mathbb{V}_s)$ cảm sinh một tác động của $\mathcal{A}$ trên $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)$. Nhận xét rằng $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)$ là đối ngẫu của đại số Dickson gồm tất cả các phần tử của $H^*(B\mathbb{V}_s)$ bất biến dưới tác động của GL_s. N. H. V. Hưng (1997) phát hiện ra rằng tồn tại một toán tử, cũng được gọi là *squaring*,

$$Sq^0 : P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_d \longrightarrow P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_{2d+s},$$

là một dạng tương tự của toán tử squaring cổ điển, và tương thích với toán tử squaring Kameko. Ông chứng minh rằng các toán tử Sq^0 trên $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$ và trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ giao hoán với nhau qua đồng cấu Lannes-Zarati

$$\varphi_s : \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2) \longrightarrow P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)).$$

Để hiểu ý nghĩa công trình này của N. H. V. Hưng, chúng tôi nói qua vài nét về Giả thuyết cổ điển các lớp cầu và Đồng cấu Lannes-Zarati.

Đồng cấu φ_s được xây dựng bởi Lannes và Zarati năm 1983. Sau đó, họ chứng minh rằng đồng cấu này là một phân bậc liên kết của đồng cấu Hurewicz $H : \pi_*^S(\mathbb{S}^0) \cong \pi_*(Q_0\mathbb{S}^0) \to H_*(Q_0\mathbb{S}^0)$ trên trang E_2 của dãy phổ Adams hội tụ đến $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$. Muộn hơn một chút, Goerss cũng chứng minh được được điều này. Bài toán tìm ảnh của đồng cấu Hurewicz $H : \pi_*^S(\mathbb{S}^0) \cong \pi_*(Q_0\mathbb{S}^0) \to H_*(Q_0\mathbb{S}^0;\mathbb{F}_2)$ được đặt ra khoảng 40 năm trước, nhưng chưa được giải quyết. Giả thuyết cổ điển về lớp cầu là một phán đoán khó liên quan đến bài toán này: *đồng cấu Hurewicz chỉ phát hiện được các phần tử của $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$ có bất biến Hopf bằng 1 hoặc bất biến Kervaire bằng 1.*

Trong dãy phổ Adams hội tụ về $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$, các phần tử với bất biến Hopf bằng 1 hoặc bất biến Kervaire bằng 1 được đại diện bởi các chu trình vĩnh cửu nào đó trong $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{1,*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$ và trong $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{2,*}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$. Lannes-Zarati (1983) chỉ ra rằng φ_1 và φ_2 không tầm thường trên một số lớp bao hàm các lớp có thể sinh ra các bất biến Hopf bằng 1 hoặc bất biến Kervaire bằng 1. Từ đó, N. H. V. Hưng (1997) đưa ra dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu như sau.

Giả thuyết 2. (N. H. V. Hưng) *Đồng cấu Lannes-Zarati*

$$\varphi_s : Ext_{\mathcal{A}}^{s,s+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \longrightarrow P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_d$$

bằng 0 tại mọi phần tử có gốc d dương với $s > 2$*.*

Giả thuyết này đã được N. H. V. Hưng (1997, 2003) chứng minh cho $s = 3, 4$. Đồng thời, ông cùng với Peterson (1998) chứng minh rằng $\varphi := \oplus_s \varphi_s$ là một đồng cấu đại số, và trên cơ sở đó chỉ ra rằng đồng cấu này bằng 0 trên mọi phần tử phân tích được có chiều đồng điều lớn hơn 2. Ở đây, một phần tử của $Ext_{\mathcal{A}}^{s,s+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ được gọi là phân tích được nếu nó là một tổng các tích của các phần tử nào đó ở bậc đồng điều nhỏ hơn s. Vì vậy, để chứng minh phần còn lại của Giả thuyết 2, ta chỉ cần xét φ_s trên các phần tử không phân tích được.

Trong công trình năm 1997, N. H. V. Hưng chỉ ra rằng hợp thành $j_s^* = \varphi_s \circ Tr_s : \mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s) \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ là đồng cấu cảm sinh từ phép đồng nhất trên $\mathbb{V}_s$, hơn nữa các toán tử Sq^0 trên $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s)$ và trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ giao hoán với nhau qua j_s^*. Sau đó, ông cùng với T. N. Nam (2001) chứng minh rằng $j_s^* = 0$ với $s > 2$. Đây chính là câu trả lời khẳng định cho dạng yếu của giả thuyết cổ điển về lớp cầu.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu hai vấn đề sau đây.

Thứ nhất, chúng tôi bước đầu khảo sát đồng cấu chuyển đại số hạng 5 trong mối liên hệ với Giả thuyết 1 của Singer. Như đã nói ở trên, Tr_s là một đẳng cấu với $s = 1, 2, 3$. Tr_4 đã được khảo sát hoàn toàn đầy đủ bởi Bruner-Hà-Hưng (2005), N. H. V. Hưng (2006), L. M. Hà (2007), T. N. Nam (2008), và Hưng - Quỳnh (2009). Với số chiều đồng điều $s \geq 5$, N. H. V. Hưng (2005) chỉ ra rằng tồn tại vô số bậc mà tại đó Tr_s không là một đẳng cấu. Điều khác lạ trong chứng minh khẳng định này của N. H. V. Hưng là ở chỗ: ta vẫn chưa biết tại những bậc đó Tr_s không là một toàn cấu hay không là một đơn cấu. Do vậy, giả thuyết của Singer về đồng cấu chuyển đại số cho đến nay vẫn còn để ngỏ. Đặc biệt, một định lý của N. H. V. Hưng (Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2006), pp. 4065–4089) nói rằng *nếu Tr_s phát hiện được một phần tử tới hạn, thì Tr_s không là đơn cấu, và hơn nữa, Tr_k không là đơn cấu tại vô hạn bậc với mỗi $k > s$*. Ở đây, một phần tử được gọi là tới hạn nếu nó bị triệt tiêu bởi toán tử squaring và gốc của nó thỏa mãn một điều kiện số học nào đó. Chẳng hạn, $P(h_2)$ là phần tử tới hạn có bậc đồng điều nhỏ nhất. Hơn nữa, tích của $P(h_2)$ với các phần tử Adams h_n sinh ra các phần tử tới hạn tại các bậc đồng điều lớn hơn 5. Câu hỏi đặt ra là liệu phần tử $P(h_2)$ có nằm trong ảnh của đồng cấu chuyển hay không? Nếu $P(h_2) \in Im(Tr_5)$, thì theo định lý nêu trên Tr_5 không là một đơn cấu, và đó Giả thuyết 1 của Singer bị bác bỏ. Tuy nhiên, theo quan điểm của định lý của N. H. V. Hưng nói trên, kết quả của chúng tôi ở Chương II về phần tử $P(h_2)$ phần nào "ủng hộ" Giả thuyết 1 của Singer. (Xem Định lý II.2.)

Thứ hai, chúng tôi khảo sát toán tử squaring Sq^0 trên đối ngẫu của hệ sinh tối thiểu của đại số Dickson (xem như một môđun trên đại số Steenrod) $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ với $s \geq 3$. Tác động của Sq^0 trên môđun nói trên đã được mô tả tường minh với $s \leq 4$ (bởi N. H. V. Hưng (1997)). Một mặt, chúng tôi nghiên cứu tính "đẳng cấu ở tận cùng" của toán tử Sq^0 (xem Định lý III.2.1). Hiện tượng này tương tự với thuộc tính của toán tử squaring Kameko được N. H. V. Hưng phát hiện: Xuất phát từ một bậc bất kỳ của $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s)$ và tác động toán tử Sq^0 liên tiếp $(s-2)$ lần, ta sẽ rơi vào một miền mà tại đó Sq^0 trở thành một đẳng cấu. Kết quả này cho chúng ta một số thông tin về $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ (xem Hệ quả III.2.2). Lưu ý rằng $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ được xác định hoàn toàn với $s \leq 5$, và còn chưa được biết với $s > 5$. Mặt khác, chúng tôi xác định một số điều kiện trên các bậc của $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ tại đó Sq^0 triệt tiêu (xem Định lý III.3.1). Các kết quả theo hướng này được ứng dụng hiệu quả vào việc nghiên cứu dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu (xem Hệ quả III.5.1, Mệnh đề III.5.2, Mệnh đề III.5.3).

Luận án được chia làm 3 chương.

Trong Chương I, chúng tôi trình bày tóm lược các kiến thức cơ bản được dùng trong phần chính của luận án, bao gồm đại số Steenrod, lý thuyết bất biến và đối bất biến, các toán tử squaring.

Các kết quả mới của luận án được trình bày trong Chương II và Chương III.

Trong Chương II, chúng tôi chứng minh *"phần tử tới hạn $P(h_2)$ trong đối đồng điều bậc 5 của đại số Steenrod không nằm trong ảnh của đồng cấu chuyển hạng 5"* (xem Định lý II.2).

Nhận xét rằng không gian véctơ $(\mathbb{F}_2 \underset{GL_5}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_5))_{11}$ là đối ngẫu của $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}^{GL_5}$, trong đó P_5 là đại số đa thức trên 5 biến, mỗi biến có bậc bằng 1. Khẳng định $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}^{GL_5} = 0$ trong Mệnh đề II.4 là mấu chốt của chứng minh Định lý II.2.

Lưu ý rằng, bằng việc sử dụng máy tính, R. R. Bruner chỉ ra rằng không gian véctơ $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}$ có 315 chiều, và không gian con các GL_5-bất biến của nó có chiều bằng 0. Để chứng minh $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}^{GL_5} = 0$, thay vì đi tìm một cơ sở gồm 315 phần tử của $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}$ (khá lớn, và tương đối khó), chúng tôi dùng một số lập luận thay thế trên một hệ sinh của không gian đó.

Trong Chương III, chúng tôi trình bày các kết quả thu được trong nghiên cứu toán tử squaring Sq^0 trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ và các ứng dụng của chúng trong khảo sát dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu.

Thứ nhất, chúng tôi chỉ ra rằng *toán tử squaring*

$$Sq^0 : P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_d \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_{2d+s}$$

là một đẳng cấu trên ảnh của nó (xem Định lý III.2.1). Một hệ quả của khẳng định này là các họ Sq^0 trong $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ hoặc là vô hạn hoặc là có độ dài bằng 1 (xem Hệ quả III.2.2). Ở đây, dãy $\{a_i |\ i \geq 0\}$ gồm các phần tử trong $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ được gọi là một họ Sq^0 nếu $a_i = Sq^0(a_{i-1})$ với mọi $i > 0$. Một họ Sq^0 được gọi là *có độ dài s* nếu nó có chính xác s phần tử khác 0. Kết quả này là một dạng tương tự của một định lý của N. H. V. Hưng trên toán tử squaring Kameko, nói rằng với mỗi d bất kỳ, $(Sq^0)^{i-s+2} : (\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s))_{2^{s-2}d+(2^{s-2}-1)s} \to (\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s))_{2^i d+(2^i-1)s}$ là một đẳng cấu với mọi $i \geq s-2$. Do đó, mọi họ Sq^0 trong $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s)$ hoặc là vô hạn hoặc là có độ dài không vượt quá $s-2$.

Thứ hai, chúng tôi đưa ra công thức tường minh mô tả tác động của toán tử squaring Sq^0 trên các phần tử cơ sở đã biết của $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ với $s = 5$ (xem Mệnh đề III.2.4).

Thứ ba, chúng tôi đưa ra một số bậc của $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ tại đó Sq^0 triệt tiêu (xem Định lý III.3.1).

Sử dụng các kết quả về toán tử squaring Sq^0, chúng tôi chứng minh rằng đồng cấu Lannes-Zarati triệt tiêu trên (1) tất cả các phần tử của mọi họ Sq^0 hữu hạn có thể ngoại trừ phần tử đầu tiên của họ đó, và (2) trên hầu hết các phần tử đã biết của nhóm đối đồng điều bậc lớn hơn 2 của đại số Steenrod. Kết quả này khẳng định một phần dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu. (Xem Hệ quả III.5.1, Mệnh đề III.5.2, Mệnh đề III.5.3.)

Chương I

Kiến thức chuẩn bị

Trong toàn bộ luận án này, chúng tôi xét vành hệ số là trường $\mathbb{F}_2$ gồm hai phần tử 0 và 1. Nếu không giải thích gì thêm thì ký hiệu $\otimes$ dùng để chỉ tích tenxơ giữa hai môđun trên trường $\mathbb{F}_2$.

Trong Mục I.1, chúng tôi nhắc lại cách xây dựng các toán tử Steenrod; cấu trúc đại số Hopf của đại số Steenrod.

Trong Mục I.2, chúng tôi trình bày sơ lược về lý thuyết bất biến và lý thuyết đối bất biến.

Trong Mục I.3, chúng tôi nhắc lại cách xây dựng 3 toán tử squaring (toán tử squaring cổ điển, toán tử squaring Kameko, toán tử squaring trên đối ngẫu của đại số Dickson), và các định lý về mối quan hệ các toán tử squaring với đồng cấu chuyển đại số và đồng cấu Lannes-Zarati.

Chương II

Nghiên cứu bước đầu đồng cấu chuyển Singer hạng 5

Gọi $\mathbb{V}_s$ là một 2-nhóm abel sơ cấp hạng s, và $H_*(B\mathbb{V}_s)$ là đồng điều (hệ số $\mathbb{F}_2$) của không gian phân loại của $\mathbb{V}_s$. Ký hiệu $PH_*(B\mathbb{V}_s)$ là không gian con của $H_*(B\mathbb{V}_s)$ gồm các phần tử bị triệt tiêu bởi mọi toán tử Steenrod bậc dương. Đồng cấu chuyển

$$Tr_s : \mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s) \to Ext^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

xác định trên các GL_s-đối bất biến của $PH_*(B\mathbb{V}_s)$ và nhận giá trị trong nhóm đối đồng điều thứ s của đại số Steenrod. Đồng cấu này được xây dựng bởi Singer năm 1989. Ông chứng tỏ rằng $Tr := \oplus_s Tr_s$ là một đồng cấu đại số, và rằng Tr_s là một đẳng cấu với $s = 1, 2$. Sau đó, Boardman (1993) chứng minh khẳng định cuối cho $s = 3$.

Bằng tính toán $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_s)$ tại một số bậc thấp, Singer chỉ ra rằng Tr_4 là một đẳng cấu tại một số bậc và Tr_5 không là toàn cấu tại bậc 9. Từ đó, ông thiết lập giả thuyết sau đây.

Giả thuyết II.1. (W. M. Singer) *Tr_s là một đơn cấu.*

Cho tới nay Tr_4 được khảo sát hoàn toàn đầy đủ bởi những công trình của các tác giả Bruner-Hà-Hưng, N. H. V. Hưng, L. M. Hà, T. N. Nam, và Hưng - Quỳnh. Với số chiều đối đồng điều $s \geq 5$, N. H. V. Hưng (2005) chứng minh rằng tồn tại vô hạn bậc mà tại đó Tr_s không là một đẳng cấu. Tuy nhiên, câu hỏi Tr_s không là toàn cấu hay không là đơn cấu tại những bậc đó thì vẫn chưa có câu trả lời. Do đó, Giả thuyết II.1 cho đến nay vẫn còn mở.

N. H. V. Hưng (2005) đưa ra một kết quả liên quan đến giả thuyết của Singer như sau. Phần tử khác không $x \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,s+d}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ được gọi là một *phần tử tới hạn* nếu

(a) $Sq^0(x) = 0$, và

(b) $2d + s$ viết được thành tổng $(2^{n_1} - 1) + \cdots + (2^{n_s} - 1)$, nhưng không thể viết được thành tổng của ít hơn s số hạng dạng $(2^n - 1)$.

Định lý II.1. (N. H. V. Hưng) *Nếu tồn tại một phần tử tới hạn nằm trong ảnh của Tr_s, thì Tr_s không là một đơn cấu, và hơn nữa tồn tại vô số bậc mà tại đó Tr_k không là một đơn cấu với mọi $k > s$.*

Phần tử Adams $P(h_2) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{5,5+11}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ là phần tử tới hạn có bậc đồng điều nhỏ nhất. Nếu $P(h_2)$ nằm trong ảnh của Tr_5, thì theo Định lý II.1 đồng cấu chuyển Tr_5 không là một đơn cấu, và do đó, Giả thuyết II.1 của Singer bị bác bỏ.

Khẳng định sau đây là kết quả chính của chương này.

Định lý II.2. *Phần tử $P(h_2) \in Ext_{\mathcal{A}}^{5,5+11}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ không nằm trong ảnh của Tr_5.*

Chương này được trình bày dựa theo bài báo [1] trong Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Gọi $P_5 := H^*(B\mathbb{V}_5) = \mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ là đại số đa thức của 5 biến $x_1, \ldots, x_5$, mỗi biến đều có bậc bằng 1. Ký hiệu $\overline{\mathcal{A}}$ là iđêan sinh bởi các toán tử Sq^i với $i > 0$. Nhắc lại rằng miền xác định của Tr_5, $\mathbb{F}_2 \underset{GL_5}{\otimes} PH_*(B\mathbb{V}_5)$, là đối ngẫu của $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)^{GL_5}$. Ở đây $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5 = P_5/\overline{\mathcal{A}}P_5$.

Một phần tử $p \in P_5$ được gọi là phần tử bị "hit" nếu $p \in \overline{\mathcal{A}}P_5$. Theo Singer, đơn thức $x_1^{p_1}x_2^{p_2}x_3^{p_3}x_4^{p_4}x_5^{p_5}$ được gọi là một *spike* nếu tồn tại các số nguyên không âm $a_1, \ldots, a_5$ sao cho $p_j = 2^{a_j} - 1$ với $1 \leq j \leq 5$. Các *spike* không xuất hiện trong bất kỳ biểu thức dạng $Sq^i(Y)$ với $i > 0$ và $Y \in P_5$. Do đó, chúng không là các phần tử bị "hit".

Sử dụng các phần tử *spike* của P_5 tại bậc 11 và một số kỹ thuật trên một hệ sinh của $\mathcal{A}$-môđun P_5, chúng tôi thu được các kết quả sau.

Ký hiệu A, B, C, D, E, F, G, H tương ứng là họ tất cả các hoán vị của các đơn thức sau đây.

$$\begin{array}{llll}(7,3,1,0,0), & (5,3,3,0,0), & (7,2,1,1,0), & (5,3,2,1,0),\\ (7,1,1,1,1), & (3,3,3,1,1), & (5,3,1,1,1), & (4,3,2,1,1).\end{array}$$

Với X là một trong các ký hiệu A, B, C, D, E, F, G, H, ta đặt $\mathcal{L}(X)$ là không gian véctơ con của $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}$ sinh bởi X. Hơn nữa, đặt $\mathcal{L}(G, H) = \mathcal{L}(G) + \mathcal{L}(H)$.

Bổ đề II.3.

$$(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11} = \mathcal{L}(A) \oplus \mathcal{L}(B) \oplus \mathcal{L}(C) \oplus \mathcal{L}(D) \oplus \mathcal{L}(E) \oplus \mathcal{L}(F) \oplus \mathcal{L}(G, H).$$

Mệnh đề II.4. $(\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} P_5)_{11}^{GL_5} = 0.$

Từ giả thiết $P(h_2)$ là một phần tử khác 0 trong $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{5,5+11}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ và Mệnh đề II.4 ta thu được Định lý II.2.

Chương III

Toán tử squaring trên đối ngẫu của đại số Dickson và Đồng cấu Lannes - Zarati

Gọi $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ là không gian con của $\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)$ gồm các phần tử bị triệt tiêu bởi mọi toán tử Steenrod bậc dương. N. H. V. Hưng (1997) phát hiện ra rằng tồn tại toán tử

$$Sq^0 : P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_\delta \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_{2\delta+s},$$

như là một dạng tương tự của toán tử squaring cổ điển trên đối đồng điều của đại số Steenrod, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Một tính chất quan trọng của toán tử Sq^0 này là nó giao hoán với toán tử squaring cổ điển qua đồng cấu Lannes-Zarati

$$\varphi_s : Ext_{\mathcal{A}}^{s,s+\delta}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_\delta$$

với mọi s. Đồng cấu Lannes-Zarati φ_s, được xây dựng quãng 1983, chính là một dạng phân bậc liên kết với đồng cấu Hurewicz $H : \pi_*^S(\mathbb{S}^0) \cong \pi_*(Q_0\mathbb{S}^0) \to H_*(Q_0\mathbb{S}^0)$ thông qua dãy phổ Adams.

Giả thuyết sau đây, được phát biểu bởi N. H. V. Hưng, là dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu.

Giả thuyết III.1. (N. H. V. Hưng) *Đồng cấu Lannes-Zarati*

$$\varphi_s : Ext_{\mathcal{A}}^{s,s+\delta}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))_\delta$$

bằng 0 tại mọi phần tử có gốc δ dương với $s > 2$.

Sự kiện φ_s không tầm thường với $s \leq 2$ tương ứng với sự tồn tại của bất biến Hopf bằng 1 và bất biến Kervaire bằng 1. Giả thuyết III.1 đã được chứng minh (bởi N. H. V. Hưng (1997, 2003)) đối với $s = 3, 4$, nhưng vẫn còn mở đối với $s \geq 5$. Mặt khác, N. H. V. Hưng và F. P. Peterson (1998) chứng minh rằng $\varphi := \oplus_s \varphi_s$ là một đồng cấu đại số, và trên cơ sở đó chỉ ra rằng đồng cấu này triệt tiêu trên mọi phần tử phân tích được với chiều đồng điều lớn hơn 2.

Trong chương này, trước hết chúng tôi khảo sát toán tử squaring Sq^0 trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$. Sau đó, áp dụng các kết quả thu được về Sq^0 chúng tôi khảo sát dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu.

Tác động của toán tử squaring Sq^0 trên các phần tử cơ sở đã biết của không gian véctơ $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ đã được mô tả (bởi N. H. V. Hưng) đối với $s \leq 4$: Sq^0 là một đẳng cấu với $s = 1, 2$, và không là một đẳng cấu với $s = 3, 4$. Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng với mọi $s \geq 3$ toán tử squaring Sq^0 trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ là một đẳng cấu trên ảnh của nó (xem Định lý III.2.1). Lưu ý rằng không gian véctơ $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ vẫn chưa được biết với $s > 5$. Chúng tôi đưa ra công thức tường minh cho tác động của Sq^0 trong trường hợp $s = 5$ (xem Mệnh đề III.2.4). Đồng thời, chỉ ra được một lớp các bậc xác định truy hồi theo s của $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ mà tại đó toán tử squaring triệt tiêu (xem Định lý III.3.1). Với các trường hợp $s \leq 7$, các bậc này có thể liệt kê tường minh (xem Mục III.4). Ứng dụng vào việc khảo sát đồng cấu Lannes-Zarati, chúng tôi chứng minh rằng Giả thuyết III.1 đúng trên hầu hết các phần tử đã biết của $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ (xem Mệnh đề III.5.1–III.5.3).

Chương này dựa trên các bài báo [2], [4] của Danh mục các công trình của tác giả liên quan tới luận án.

III.1 Biểu diễn mức độ dây chuyền của toán tử squaring đối ngẫu theo các bất biến Dickson

Tập hợp tất cả các GL_s-bất biến của $H^*(B\mathbb{V}_s)$ là một đại số đa thức (được gọi là đại số Dickson):

$$D_s := H^*(B\mathbb{V}_s)^{GL_s} = \mathbb{F}_2[Q_{s,0}, Q_{s,1}, \ldots, Q_{s,s-1}],$$

trong đó $Q_{s,i}$ là bất biến Dickson có bậc $2^s - 2^i$ và được xác định truy hồi bởi công thức

$$Q_{s,i} = Q_{s-1,i-1}^2 + Q_{s-1,i}V_s,$$

ở đây, theo qui ước, $Q_{s,s} = 1$, $Q_{s,i} = 0$ với $i < 0$, và V_s là bất biến Mùi.

Để thuận tiện, với mỗi dãy $I = (i_0, i_1, \ldots, i_{s-1})$ các số nguyên không âm, ta ký hiệu $Q(I)$ thay cho đơn thức $Q_{s,0}^{i_0} \ldots Q_{s,s-1}^{i_{s-1}}$.

Mệnh đề III.1.1. *Biểu diễn ở mức độ dây chuyền của toán tử squaring đối ngẫu* $Sq_*^0 : \mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s \to \mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$ *được xác định bởi*

$$Sq_*^0(Q(I)) = \begin{cases} Q_{s,0}^{\frac{i_0+s-2}{2}} Q_{s,1}^{\frac{i_1-1}{2}} \cdots Q_{s,s-1}^{\frac{i_{s-1}-1}{2}}, & \text{nếu } i_0 + s \text{ chẵn, } i_1, \ldots, i_{s-1} \text{ lẻ,} \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

III.2 Toán tử squaring là một đẳng cấu trên ảnh của nó

Ký hiệu $d(i_0, \ldots, i_{s-1}) \in \mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)$ là đối ngẫu của đơn thức $Q_{s,0}^{i_0} \ldots Q_{s,s-1}^{i_{s-1}}$ theo cơ sở của D_s bao gồm tất cả các đơn thức theo các biến $Q_{s,0} \ldots Q_{s,s-1}$.

Định lý III.2.1. *Toán tử squaring* $Sq^0 : P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)) \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ *là một đẳng cấu trên ảnh của nó* $Im(Sq^0)$.
Hơn nữa, nếu $d(i_0, ..., i_{s-1}) \in P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ *thì*

$$Sq^0 d(i_0, ..., i_{s-1}) = \begin{cases} d(s-2, 2i_1+1, ..., 2i_{s-1}+1), & \text{nếu } i_0 = s-2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Hệ quả III.2.2. *Bất kỳ họ* Sq^0 *nào trong* $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ *hoặc là vô hạn hoặc là hữu hạn với độ dài 1.*

Với mỗi đơn thức $Q(I)$ của D_s, $[Q(I)]$ là ký hiệu lớp của $Q(I)$ trong $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$.

Định nghĩa III.2.3. Một cơ sở các đơn thức $\{[Q(I)] \mid I \in \mathcal{I}\}$ của $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$ được gọi là một cơ sở đóng nếu từ giả thiết $(s-2, j_1, ..., j_{s-1}) \in \mathcal{I}$ với $j_1, ..., j_{s-1}$ lẻ, suy ra hoặc là $(s-2, \frac{j_1-1}{2}, ..., \frac{j_{s-1}-1}{2}) \in \mathcal{I}$ hoặc là $[Q(s-2, \frac{j_1-1}{2}, ..., \frac{j_{s-1}-1}{2})] = 0$.

Các cơ sở đã biết của $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$ với $s \leq 5$ là các cơ sở đóng.

Gọi $\overline{d}(I) \in P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ là đối ngẫu của $[Q(I)]$ theo cơ sở $\{[Q(I)] \,| I \in \mathcal{I}\}$ của $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$. Mệnh đề sau đây mô tả tác động của toán tử Sq^0 trên các phần tử của một cơ sở đóng. Mệnh đề này không là một hệ quả của Định lý III.2.1, bởi vì $\overline{d}(I)$ là phần tử bị triệt tiêu bởi mọi toán tử Steenrod bậc dương, trong khi đó $d(I)$ có thể không bị triệt tiêu bởi các toán tử đó. Ta luôn có $\overline{d}(I) = d(I) +$ những số hạng khác.

Mệnh đề III.2.4. *Nếu $\{[Q(I)] \mid I \in \mathcal{I}\}$ là một cơ sở đóng của $\mathbb{F}_2 \underset{\mathcal{A}}{\otimes} D_s$, thì*

$$Sq^0(\overline{d}(i_0, i_1, ..., i_{s-1})) = \begin{cases} \overline{d}(i_0, 2i_1+1, ..., 2i_{s-1}+1), & \text{nếu } i_0 = s-2, \\ 0, & \text{nếu trái lại,} \end{cases}$$

với bất kỳ $I = (i_0, ..., i_{s-1}) \in \mathcal{I}$.

III.3 Bậc triệt tiêu của toán tử squaring

Hàm κ_s xác định trên các số nguyên không âm cho được bởi công thức $\kappa_s(r) = r + 2^{\nu(s-2-r)}$, trong đó $\nu(s-2-r)$ là lũy thừa cao nhất của 2 chia hết $s-2-r$, và qui ước $2^{\nu(0)} = 0$. Để thuận tiện, ta qui ước $\kappa_s^0(r) = r$. Định nghĩa theo qui nạp $\kappa_s^\ell(r) = \kappa_s(\kappa_s^{\ell-1}(r))$ với $\ell \geq 1$.

Định lý III.3.1. *Toán tử squaring Sq^0 trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ triệt tiêu tại bất kỳ bậc δ thỏa mãn*

(i) hoặc $\nu(\delta + s) \leq [\log_2(s-2)] + 1$ với $s \geq 3$,

(ii) hoặc δ không là một trong các dạng δ_s được xác định qui nạp theo s như sau.

$$\delta_s = \delta_{s-1} - 1 + 2^{s-1}[\kappa_1^{j_{s-1}} \kappa_2^{j_{s-2}} \ldots \kappa_{s-1}^{j_1}(s-2) + 1],$$

với bất kỳ dãy $[\log_2(s-2)] < j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_{s-1}$*, trong đó* $s \geq 3$*, và* $\delta_2 = 2^{j_1+1} - 2$*.*

III.4 Bậc triệt tiêu của toán tử squaring tại những hạng nhỏ

Định nghĩa III.4.1. (Giambalvo-Peterson) *Một đơn thức* $Q(I) = Q_{s,0}^{i_0} Q_{s,1}^{i_1} \dots Q_{s,s-1}^{i_{s-1}}$ *của* D_s *được gọi là rút gọn được nếu tồn tại một dãy gồm s số nguyên không âm* $J = [j_0, j_1, \dots, j_{s-1}]$ *sao cho*

$$\begin{aligned} i_0 &= \kappa_s^{j_0}(0), \\ i_k &= \kappa_{s-k}^{j_k}(i_0 + i_1 + \dots + i_{k-1}) - (i_0 + i_1 + \dots + i_{k-1}), \end{aligned}$$

với $1 \leq k \leq s-1$*. Khi đó,* $J = [j_0, j_1, \dots, j_{s-1}]$ *được gọi là dạng rút gọn của* I*.*

Dạng rút gọn $J = [j_0, j_1, \dots, j_{s-1}]$ được gọi là *có các số hạng không giảm* nếu $j_\ell \leq j_{\ell+1}$ với mọi ℓ.

Bổ đề III.4.2. *Giả sử* $Q(I) = Q(3, i_1, i_2, i_3, i_4)$ *là một đơn thức không phân tích được có bậc* δ *của* D_5 *với dạng rút gọn có các số hạng không giảm là* $[j_1, j_2, j_3, j_4]$*. Khi đó,* $j_1 \geq 2$ *và*

$$\delta + 5 = \begin{cases} 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_4+5}, & j_1 \leq j_2 < j_3 < j_4, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_4+6}, & j_1 \leq j_2 < j_3 = j_4, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+6}, & j_1 \leq j_2 = j_3 \leq j_4. \end{cases}$$

Bổ đề III.4.3. *Giả sử* $Q(I) = Q(4, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$ *là một đơn thức không phân tích được có bậc* δ *của* D_6 *với dạng rút gọn có các số hạng không giảm* là $[j_1, j_2, j_3, j_4, j_5]$. *Khi đó,* $j_1 \geq 3$ *và*

$$\delta+6 = \begin{cases} 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_4+5} + 2^{j_5+6}, & j_1 \leq j_2 < j_3 < j_4 < j_5, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_5+7}, & j_1 \leq j_2 < j_3 < j_4 = j_5, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_4+6} + 2^{j_5+7}, & j_1 \leq j_2 < j_3 = j_4 \leq j_5, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_5+7}, & j_1 \leq j_2 = j_3 \leq j_4 = j_5 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_5+6}, & j_1 \leq j_2 = j_3 \leq j_4 < j_5 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_4+7}, & j_1 \leq j_2 = j_3 < j_4 = j_5, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+8}, & j_1 \leq j_2 = j_3 = j_4 = j_5. \end{cases}$$

Bổ đề III.4.4. *Giả sử* $Q(I) = Q(5, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ *là một đơn thức không phân tích được có bậc* δ *của* D_7 *với dạng rút gọn có các số hạng không giảm là* $[j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6]$. *Khi đó,* $\mathrm{j}_1 \geq 3$ *và*

$$\delta + 7 =$$

$$\begin{cases} 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_4+5} + 2^{j_5+6} + 2^{j_6+7}, & j_2 < j_3 < j_4 < j_5 < j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_4+5} + 2^{j_5+8}, & j_2 < j_3 < j_4 < j_5 = j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+4} + 2^{j_5+7} + 2^{j_6+8}, & j_2 < j_3 < j_4 = j_5 \leq j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+9}, & j_2 < j_3 = j_4 = j_5 = j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+6} + 2^{j_5+6} + 2^{j_5+7} + 2^{j_5+8}, & j_2 < j_3 = j_4 < j_5 = j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+6} + 2^{j_5+9}, & j_2 < j_3 = j_4 \leq j_5 = j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+3} + 2^{j_3+6} + 2^{j_5+7} + 2^{j_6+7}, & j_2 < j_3 = j_4 \leq j_5 < j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_5+7} + 2^{j_6+8}, & j_2 = j_3 \leq j_4 = j_5 - 1 \leq j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_5+8}, & j_2 = j_3 \leq j_4 < j_5 - 1 = j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_5+6} + 2^{j_6+7}, & j_2 = j_3 \leq j_4 < j_5 - 1 < j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_4+9}, & j_2 = j_3 < j_4 = j_5 = j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_3+5} + 2^{j_4+5} + 2^{j_4+6} + 2^{j_4+7} + 2^{j_6+8}, & j_2 = j_3 < j_4 = j_5 \leq j_6 - 1, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+7} + 2^{j_2+9}, & j_2 = j_3 = j_4 = j_5 = j_6, \\ 2^{j_1+1} + 2^{j_2+8} + 2^{j_6+8}, & j_2 = j_3 = j_4 = j_5 < j_6. \end{cases}$$

III.5 Ứng dụng để khảo sát đồng cấu Lannes-Zarati

Lấy $\{a_i|\ i \geq 0\}$ là một họ Sq^0 trong $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, tức là $a_i = (Sq^0)^i(a_0)$ với mọi i, trong đó Sq^0 là toán tử squaring cổ điển trên $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Nhắc lại rằng toán tử squaring Sq^0 trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ giao hoán với toán tử squaring cổ điển Sq^0 trên $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ qua đồng cấu Lannes-Zarati

$$\varphi_s : Ext^{s,s+*}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s)).$$

Do đó,

$$\varphi_s(a_i) = (Sq^0)^i(\varphi_s(a_0)) \quad \text{với mọi } i.$$

Nếu $\varphi_s(a_t) = 0$ thì $\varphi_s(a_i) = 0$ với $i \geq t$. Vì vậy, ta cần khảo sát khả năng $\varphi_s(a_t) = 0$ với t nhỏ.

Mệnh đề sau đây được suy ra từ Hệ quả III.2.2.

Mệnh đề III.5.1. *Nếu $\{a_i|\ i \geq 0\}$ là một họ Sq^0 hữu hạn trong $Ext^{s,*}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, thì $\varphi_s(a_i) = 0$ với mọi $i > 0$.*

Nếu $a_0 \in \mathrm{Ext}^{s,s+d}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ thì d được gọi là gốc của phần tử a_0, và được ký hiệu là $Stem(a_0)$. Khẳng định sau đây là hệ quả của Định lý III.3.1.

Mệnh đề III.5.2. *Lấy $\{a_i|i \geq 0\}$ là một họ Sq^0 trong $Ext^{s,*}_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Giả sử $\delta = Stem(a_0)$ thỏa mãn một trong các điều kiện*

(i) $\nu(\delta + s) \leq [\log_2(s-2)] + 1$ với $s \geq 3$;

(ii) δ không có dạng δ_s được xác định trong Định lý III.3.1. Nói riêng, $\delta + s$ không là một trong các dạng được liệt kê tương ứng trong các Bổ đề III.4.2 – III.4.4 với $5 \leq s \leq 7$.

Khi đó, $\varphi_s(a_i) = 0$ với mọi $i > 0$.

Mệnh đề III.5.3. *Nếu $Stem(a_0) < 2^{s-1}$ thì $\varphi_s(a_i) = 0$ với mọi $i \geq 0$.*

Áp dụng Mệnh đề III.5.2 và Mệnh đề III.5.3 cho tất cả các phần tử trong $Ext^s_{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ với $s \leq 39$ được liệt kê bởi Bruner và bởi Tangora, Giả thuyết III.1 đúng trên hầu hết các phần tử đã biết.

Kết luận

Trong luận án này chúng tôi thu được các kết quả chính sau.

1. Chứng minh rằng phần tử tới hạn $P(h_2) \in Ext_{\mathcal{A}}^{5,16}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ không nằm trong ảnh của đồng cấu chuyển đại số hạng 5.

2. Chứng minh rằng toán tử squaring Sq^0 tác động trên $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ là một đẳng cấu trên ảnh của nó.

4. Chỉ ra một lớp các bậc xác định truy hồi theo s của $P(\mathbb{F}_2 \underset{GL_s}{\otimes} H_*(B\mathbb{V}_s))$ tại đó toán tử squaring Sq^0 triệt tiêu. Các lớp bậc này được liệt kê tường minh với $s \leq 7$.

5. Khẳng định dạng đại số của Giả thuyết cổ điển về lớp cầu trong một số trường hợp riêng. Cụ thể là đồng cấu Lannes - Zarati φ_s triệt tiêu trên (1) tất cả các phần tử của mọi họ Sq^0 hữu hạn có thể ngoại trừ phần tử đầu tiên của họ đó, và (2) trên hầu hết các phần tử đã biết của nhóm đối đồng điều bậc lớn hơn 2 của đại số Steenrod.

Danh mục công trình liên quan đến luận án

1. Võ T. N. Quỳnh (2007), "On behavior of the fifth algebraic transfer", *in Proceedings of the School and Conference in Algebraic Topology,* **11**, Geom. Topol. Publ., Conventry, pp. 309 - 326.

2. Nguyễn H. V. Hưng, Võ T. N. Quỳnh (2009), "The squaring operation on A-generators of the Dickson algebra", *Proc. Japan Acad.,* **85**(6), Ser. A, pp. 67 – 70.

3. Nguyễn H. V. Hưng, Võ T. N. Quỳnh (2009), "The image of Singer's fourth transfer", *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I,* **347**, pp. 1415 – 1418.

4. Nguyễn H. V. Hưng, Võ T. N. Quỳnh (2010), "The squaring operation on A- generators of the Dickson algebra", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **148**, pp. 267 – 288.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị tổng kết năm 2004 của Khoa Toán – Cơ – Tin học (Trường đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, 11/2004, báo cáo 15 phút).

- Hội nghị Khoa học kỷ niệm 50 năm thành lập Khoa Toán – Cơ – Tin học (Trường đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, 10/2006, báo cáo 15 phút).

- Hội nghị Đông Á lần thứ nhất về Tôpô đại số , Đại học Quốc gia Hàn Quốc, Seoul, Hàn Quốc, 11/2007, báo cáo 25 phút.

- Hội nghị toàn quốc về Đại số - Hình học - Tôpô, Đại học Vinh, 12/2007.

- Xemina Bộ môn Đại số - Hình học – Tôpô, Trường đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, 10/2007.

- Xemina Phòng Hình học – Tôpô, Viện Toán học, 3/2008.

- Hội nghị Đông Á lần thứ ba về Tôpô đại số, Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội, 12/2009, báo cáo 40 phút.