BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO   VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG DUNG

PHÂN LOẠI CÁC BIỂU DIỄN CỦA MỘT NHÓM MA TRẬN LƯỢNG TỬ

CHUYÊN NGÀNH: Toán Học

MÃ SỐ: 62 46 05 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN TOÁN HỌC

Hà Nội – 2010

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI VIỆN TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biên 3:

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận án cấp Nhà nước
Viện toán học
Vào hồi ... giờ ... phút, ngày ... tháng ... năm 2010

Có thể tìm hiểu Luận án tại:
Viện toán học
Thư viện Quốc gia

Mở đầu

Nhóm lượng tử loại A được hiểu là một đại số Hopf được xây dựng từ một nghiệm của phương trình Yang-Baxter thỏa mãn hệ thức Hecke và điều kiện đóng. Vấn đề được quan tâm trong luận án là nghiên cứu biểu diễn của các nhóm lượng tử này, cụ thể là phân loại các biểu diễn bất khả quy trong trường hợp số chiều thấp ((2|1) và (3|1)).

Cố định một không gian véc tơ V, với chiều d, trên trường đóng đại số k, đặc số 0. Một toán tử khả nghịch $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ được gọi là một đối xứng Hecke nếu nó thỏa mãn phương trình Yang - Baxter, hệ thức Hecke và tính chất đóng.

Từ một đối xứng Hecke R, ta xây dựng đại số Hopf H_R như sau. Cố định một cơ sở $x_1, x_2, \ldots, x_d$ của V, theo cơ sở này R biểu diễn bởi ma trận, ký hiệu là (R_{ij}^{kl}). Đại số H_R là thương của đại số tự do không giao hoán trên các phần tử sinh $(z_j^i, t_j^i)_{1\le i,j\le d}$ theo các hệ thức sau

$$z_m^i z_n^j R_{kl}^{mn} = R_{pq}^{ij} z_k^p z_l^q$$
$$z_k^i t_j^k = t_k^i z_j^k = \delta_j^i$$

H_R là một đại số Hopf, với các ánh xạ cấu trúc

$$\triangle(z_j^i) = z_k^i \otimes z_j^k, \triangle(t_j^i) = t_i^k \otimes t_k^j, \varepsilon(z_j^i) = \varepsilon(t_j^i) = \delta_j^i \text{ và } S(z_j^i) = t_j^i.$$

Phép đối xứng thông thường: $R(x \otimes y) = y \otimes x$ là một đối xứng Hecke (với $q = 1$). Đại số H_R tương ứng chính là vành các hàm chính quy trên nhóm $GL(V)$:

$$k[z_j^i][\det(z_j^i)^{-1}$$

Tương tự, nếu V là một siêu không gian véc tơ và R là phép siêu đối xứng, thì H_R chính là siêu đại số các hàm chính quy trên siêu nhóm ma trận toàn phần.

Ví dụ quan trọng nhất của một đối xứng Hecke là các nghiệm chuẩn loại A của phương trình Yang-Baxter tìm ra bởi Drinfeld và Jimbo. Trong trường hợp

V có chiều 2, nghiệm này được cho bởi ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & q^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

Khi $q = 1$, toán tử này là phép đối xứng thông thường trên $V \otimes V$ đã nhắc tới ở trên. Các nghiệm chuẩn ứng với siêu đối xứng được đưa ra bởi Manin.

Trên cơ sở của các ví dụ ở trên người ta nói H_R xác định một nhóm ma trận lượng tử loại A.

Với mỗi đối xứng Hecke R, người ta còn xét các đại số S_R, Λ_R:

$$\begin{aligned} S_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R_{ij}^{kl} = q x_i x_j), \\ \Lambda_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R_{ij}^{kl} = -x_i x_j). \end{aligned}$$

Các đại số S_R và Λ_R được coi là xác định một không gian tuyến tính lượng tử. S_R được gọi là đại số đối xứng lượng tử, Λ_R được gọi là đại số phản đối xứng lượng tử.

Λ_R, S_R là các đại số toàn phương, nghĩa là sinh bởi các phần tử bậc nhất với các hệ thức bậc hai, và do đó là các đại số phân bậc. Chuỗi Poincaré tương ứng của chúng là

$$P_\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(\Lambda_n) t^n, P_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k(S_n) t^n,$$

với Λ_n và S_n là các thành phần thuần nhất bậc n tương ứng của Λ_R và S_R.

Khi R là phép đối xứng thông thường, ta có

$$P_\Lambda(t) = (1+t)^d, \quad P_S(t) = \frac{1}{(1-t)^d}$$

Khi R là phép siêu đối xứng của siêu không gian véc tơ V, với siêu chiều $(m|n)$ ta có

$$P_\Lambda(t) = \frac{(1+t)^m}{(1-t)^n}, \quad P_S(t) = \frac{(1+t)^n}{(1-t)^m}$$

Các đại số Λ_R, S_R đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu phạm trù biểu diễn của nhóm ma trận lượng tử liên kết với R. Chúng ta có các kết quả sau. Lyubashenko đã chứng minh rằng: nếu $q = 1$ và chuỗi Poincaré của Λ_R là đa thức, thì nó có tính chất thuận nghịch. Gurevich mở rộng kết quả này với q bất kỳ, không là căn của đơn vị.

P.H.Hai đã chứng minh rằng chuỗi Poincaré của đại số toàn phương Λ_R là một phân thức hữu tỷ, với tử thức là một đa thức bậc m, chỉ có m nghiệm âm, mẫu thức là một đa thức bậc n, chỉ có n nghiệm dương.

Một câu hỏi đặt ra là với m, n không đồng thời bằng 0, thì chuỗi Poincaré của các đại số Λ_R và S_R có còn có tính chất thuận nghịch hay không?

Nội dung chính của Chương I là đưa ra câu trả lời khẳng định cho câu hỏi về tính thuận nghịch của chuỗi Poincaré nhắc tới ở trên. Cụ thể, chúng tôi chứng minh được rằng tử thức và mẫu thức của chuỗi Poincaré luôn là đa thức có tính chất thuận nghịch và đối thuận nghịch, và các đa thức này có hệ số nguyên. Các công cụ được sử dụng ở đây là công thức Littlewood-Richardson, tiêu chuẩn để đối mô đun đơn là nội xạ và xạ ảnh.

Cặp bậc (m, n) của tử thức và mẫu thức của chuỗi Poincaré của Λ_R, được gọi là *song hạng* của đối xứng Hecke R. Phùng Hồ Hải đã chỉ ra rằng: song hạng của đối xứng Hecke xác định phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử tương ứng. Vì thế chúng ta chỉ cần xét các nghiệm chuẩn loại A của phương trình Yang-Baxter và ký hiệu nhóm lượng tử liên kết là $GL_q(m|n)$.

Với $m = 0$ hoặc $n = 0$ phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử là nửa đơn. Khi đó bài toán phân loại biểu diễn của nhóm lượng tử được giải quyết bởi P.H.Hai. Khi m và n đều khác 0, bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử nói chung chưa được giải quyết. Một trong những khó khăn chính ở đây là phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử không còn là nửa đơn nữa. Năm 1986, Palev đã chứng minh được một lớp các biểu diễn của $GL_q(n|1)$ là bất khả qui, tuy nhiên đây chưa phải là tất cả các biểu diễn bất khả qui của nó. Năm 2000, P.H.Hai đã giải quyết bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(1, 1)$.

Trong Chương II, chúng tôi giải quyết bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2, 1)$. Công cụ chính ở đây là các phức Koszul $K_\bullet$. Nhờ tính chất thuận nghịch của chuỗi Poincaré đã được chứng minh trong Chương I, chúng tôi chứng tỏ được rằng phức K_1 có đồng điều với chiều 1, từ đó tìm được dãy hợp thành của tất cả các thành phần của các phức Koszul K_i. Tập các đối mô đun trong các dãy hợp thành của các phức Koszul $K_\bullet$ là tất cả các đối mô đun đơn của H_R, và chúng có thể được đánh số bởi tập các bộ số nguyên (m, n, p) thỏa mãn $m \geq n$. Để chứng minh tính đơn của các đối mô đun xây dựng được, kỹ thuật chính là dựa trên tính chất của đại số Hopf có tích phân. Trên đại số Hopf có tích phân tồn tại một lớp đối mô đun đặc biệt mà người ta gọi là đối mô đun "chẻ", trong trường hợp các siêu đại số Lie nửa đơn, lớp này được Kac gọi là biểu diễn *điển hình*. Một đối mô đun đơn được gọi là đối mô đun chẻ nếu nó là nội xạ và xạ ảnh. Chúng tôi đã đưa ra được điều kiện để một đối mô đun đã xây dựng là đối mô đun chẻ. Ngoài ra chúng tôi còn đưa ra công thức tính chiều cho các đối mô đun đơn trên $GL_q(2|1)$.

Chương III đưa ra một phương pháp xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm $GL(3|1)$. Chương này phục vụ cho việc xây dựng các biểu diễn bất khả quy của của nhóm lượng tử trong trường hợp song hạng là $(3, 1)$ ở Chương IV.

Kac phân loại các biểu diễn bất khả qui của siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$. Các biểu diễn bất khả qui của $\mathfrak{gl}(m|n)$ được chia thành hai loại: điển hình và không điển hình. Sau đó, Kac đã đưa ra một công thức tính đặc trưng cho tất cả các biểu diễn điển hình. Nhờ việc sử dụng mô đun Verma, Kac đưa ra cách xây dựng chi tiết cho tất cả các biểu diễn điển hình.

Năm 2007, Su và Zhang đã đưa ra được một công thức tính đặc trưng cho tất cả các biểu diễn. Nhưng việc xây dựng cụ thể cho tất cả các biểu diễn không điển hình vẫn là một bài toán chưa được giải quyết.

Bằng cách kết hợp các phức Koszul K và L để thu được một phức Koszul kép và dựa vào kết quả của Su-Zhang, chúng tôi đã đưa ra được một cách xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$.

Mục đích của Chương IV là phân loại các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$. Với phương pháp đã dùng trong Chương III, chúng tôi xây dựng một lớp các biểu diễn của $GL_q(3|1)$. Chúng tôi dự đoán rằng tập các biểu diễn xây dựng được là tập tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$ và đã thu được một số kết quả ban đầu. Chúng tôi hy vọng sẽ hoàn thiện các chứng minh trong thời gian tới.

Chương 1

Biểu diễn của nhóm lượng tử loại A và ứng dụng

Trong chương này, trước hết chúng tôi giới thiệu về nhóm lượng tử liên kết với một đối xứng Hecke. Tiếp theo chúng tôi ứng dụng các kết quả đã biết vào việc nghiên cứu chuỗi Poincaré của các đại số liên kết với đối xứng Hecke đã cho.

1.1 Đối xứng Hecke

k là trường đóng đại số, đặc số 0. Các không gian véc tơ được hiểu là không gian véc tơ trên k.

Định nghĩa 1.1.1 *Cho V là không gian véc tơ hữu hạn chiều, một toán tử khả nghịch $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ được gọi là một đối xứng Hecke nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$, *với* $R_1 := R \otimes \mathrm{Id}_V, R_2 := \mathrm{Id}_V \otimes R$,

(ii) $(R + 1)(R - q) = 0$ *với* $q \in k^\times$,

(iii) Toán tử nửa liên hợp với R, $R^\sharp : V^* \otimes V \longrightarrow V \otimes V^*$, được đưa ra bởi

$$\langle R^\sharp(\xi \otimes v), w\rangle = \langle \xi, R(v \otimes w)\rangle, \text{ là nghịch đảo được .}$$

q được gọi là tham số lượng tử. Ta luôn giả sử $q^n \neq 1$ với mọi $n \geq 2$.
Cố định một cơ sở $x_1, x_2, \ldots, x_d$ của V, thì R có thể biểu diễn được dưới dạng ma trận ký hiệu là (R_{ij}^{kl}), tức là $R(x_i \otimes x_j) = x_k \otimes x_l R_{ij}^{kl}$. Để cho thuận tiện chúng tôi qui ước nếu chỉ số xuất hiện cả ở phía trên và phía dưới của một biểu thức nào đó, thì hiểu rằng biểu thức được lấy tổng theo các chỉ số đó.

1.2 Các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke

Cho R là đối xứng Hecke. Ta xét các đại số sau:

$$\begin{aligned} S_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R^{kl}_{ij} = q x_i x_j), \\ \Lambda_R &:= k\langle x_1, x_2, \ldots, x_d\rangle/(x_k x_l R^{kl}_{ij} = -x_i x_j), \\ E_R &:= k\langle z^1_1, z^1_2, \ldots, z^d_d\rangle/(z^i_m z^j_n R^{mn}_{kl} = R^{ij}_{pq} z^p_k z^q_l), \\ H_R &:= k\langle z^1_1, z^1_2, \ldots, z^d_d, t^1_1, t^1_2, \ldots, t^d_d\rangle \Bigg/ \left(\begin{array}{c} z^i_m z^j_n R^{mn}_{kl} = R^{ij}_{pq} z^p_k z^q_l, \\ z^i_k t^k_j = t^i_k z^k_j = \delta^i_j \end{array} \right) \end{aligned}$$

với $\{z^i_j\}$ và $\{t^i_j\}$ là các tập sinh. Các đại số Λ_R, S_R được gọi là đại số phản đối xứng lượng tử và đại số đối xứng lượng tử. Đại số E_R là song đại số, H_R là một đại số Hopf.

Ánh xạ tự nhiên $i : E_R \longrightarrow H_R$ là đơn ánh. Vì vậy E_R được coi là song đại số con của H_R. Nên các đối mô đun trên E_R cũng là đối mô đun trên H_R.

Các đại số S_R, Λ_R là các đại số toàn phương, chuỗi Poincaré tương ứng của các đại số này là

$$P_\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k \Lambda_n t^n, \qquad P_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim_k S_n t^n.$$

1.3 Đối mô đun trên E_R

Không gian véc tơ V là đối mô đun trên E_R. Do E_R là song đại số, các lũy thừa ten xơ của V cũng là đối mô đun trên E_R. Phân loại của đối mô đun trên E_R được giải quyết nhờ đại số Hecke.

1.3.1 Đại số Hecke

Định nghĩa 1.3.1 *Đại số Hecke $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{q,n}$ là một đại số, có hệ sinh gồm các phần tử $T_i, 1 \le i \le n-1$, thỏa mãn các hệ thức sau:*

$$T_i T_j = T_j T_i : |i-j| \ge 2; \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}; \qquad T_i^2 = (q-1)T_i + q$$

Như là một không gian véc tơ, $\mathcal{H}_n$ có cơ sở $T_w, w \in S_n$ (S_n là nhóm các hoán vị của n phần tử) được xác định như sau $T_{(i,i+1)} = T_i$ và $T_w T_v = T_{wv}$ nếu $l(wv) = l(w) + l(v)$.

Với $q^n \neq 1 : n \geq 2$, đại số H_n là nửa đơn. Một đối xứng Hecke R trên không gian véc tơ V cảm sinh một tác động của đại số Hecke $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{q,n}$ trên $V^{\otimes n}$: $T_i \longmapsto R_i = \mathrm{id}_V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes n-i-1}$. Tác động này giao hoán với tác động của E_R. Vì vậy mỗi phần tử của $\mathcal{H}_n$ xác định một tự đồng cấu của $V^{\otimes n}$ như là tự đồng cấu của E_R-đối mô đun.

Điều ngược lại cũng đúng, mỗi E_R- tự đồng cấu đối mô đun của $V^{\otimes n}$ biểu diễn tác động của một phần tử của $\mathcal{H}_n$. Do đó $V^{\otimes n}$ là nửa đơn và các đối mô đun con đơn của nó có thể được đưa ra như là ảnh của các tự đồng cấu được xác định bởi các phần tử lũy đẳng nguyên thủy của $\mathcal{H}_n$ và các phần tử lũy đẳng liên hợp xác định các đối mô đun đẳng cấu.

Vì các lớp liên hợp của các phần tử lũy đẳng nguyên thủy của $\mathcal{H}_n$ được đánh số bởi các phân hoạch của n, nên các đối mô đun con đơn của $V^{\otimes n}$ được đánh số bởi một tập con của các phân hoạch của n.

1.3.2 Thuật toán Littlewood-Richardson

Ta biết rằng các đối mô đun đơn trên E_R được đánh số bởi tập con của các phân hoạch. Công thức phân tích tích ten xơ của hai đối mô đun đơn được đưa ra nhờ các hệ số Littlewood - Richardson. Cho I_λ, I_μ là ký hiệu của các đối mô đun đơn tương ứng với phân hoạch λ, μ tương ứng. Khi đó

$$I_\lambda \otimes I_\mu \cong \bigoplus_\gamma {I_\gamma}^{\oplus c^\gamma_{\lambda\mu}} \tag{1.3}$$

trong đó $c^\gamma_{\lambda\mu}$ là hệ số Littlewood-Richardson miêu tả phép nhân của hàm Schur s_γ trong tích của hai hàm Schur s_λ và s_μ.

Hệ số Littlewood-Richardson và một thuật toán tổ hợp để tính toán các hệ số $c^\gamma_{\lambda\mu}$, được gọi là thuật toán Littlewood-Richardson, đã được chúng tôi mô tả chi tiết trong luận án.

1.4 Đối mô đun trên H_R

Ánh xạ tự nhiên $i : E_R \longrightarrow H_R$ là đơn ánh, nên mọi E_R-đối mô đun đơn cũng là H_R-đối mô đun đơn. Vì H_R là một đại số Hopf, nên các đối mô đun hữu hạn chiều M trên H_R đều có đối mô đun đối ngẫu, với đối tác động cảm sinh từ đối tác động của M. Trên H_R có một lớp mô đun đặc biệt mà người ta thường quan tâm đến đó là đối mô đun chẻ.

Định nghĩa 1.4.1 *Một đối mô đun đơn trên H_R được gọi là* chẻ *nếu nó là nội xạ và xạ ảnh.*

Đối mô đun I_λ là chẻ nếu và chỉ nếu $\lambda_m \geq n$, với (m, n) là song hạng của R.

1.5 Phức Koszul liên kết với đối xứng Hecke

Ký hiệu V^* là không gian véc tơ đối ngẫu của V, X_n, Y_n là các toán tử đối xứng lượng tử, phản đối xứng lượng tử, được định nghĩa như sau:

$$X_n := \frac{1}{[n]_q!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} R_w, \qquad Y_n := \frac{1}{[n]_{1/q}!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}(-q)^{-l(w)}R_w.$$

Phức Koszul L với vi phân P được xây dựng như sau:

$$P_{p,r} : S_p \otimes \Lambda_r \hookrightarrow V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes r} = V^{\otimes(p-1)} \otimes V^{\otimes(r+1)} \xrightarrow{X_{p-1}\otimes Y_{p+1}} S_{p-1} \otimes \Lambda_{r+1}\ .$$

Ngoài ra, ta còn có một toán tử vi phân Q sau đây:

$$Q_{p,r} : S_{p-1} \otimes \Lambda_{r+1} \hookrightarrow V^{\otimes(p-1)} \otimes V^{\otimes(r+1)} = V^{\otimes p} \otimes V^{\otimes r} \xrightarrow{X_p\otimes Y_r} S_p \otimes \Lambda_r\ .$$

Phức (L, P) là luôn khớp. Trên $L_{p,r}$ ta có:

$$[r][p+1]PQ + [p][r+1]QP = [r+p]\mathrm{id}. \tag{1.8}$$

Người ta còn định nghĩa phức Koszul K như sau: Phức Koszul K, với thành phần tại vị trí (k, l) là $K^{k,l} := \Lambda_k \otimes S_l^*$. Các toán tử vi phân $d_{k,l} : \Lambda_k \otimes S_l^* \longrightarrow \Lambda_{k+1} \otimes S_{l+1}^*$ xây dựng như sau:

$$d_{k,l} : \Lambda_k \otimes S_l{}^* \hookrightarrow V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} \overset{\mathrm{id}\otimes\mathrm{db}_V\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow} V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1} \overset{Y_{k+1}\otimes X_{l+1}{}^*}{\longrightarrow} \Lambda_{k+1} \otimes S_{l+1}{}^*.$$

Ta cũng có một toán tử vi phân

$$\partial_{k,l} : \Lambda_{k+1} \otimes S_{l+1}{}^* \hookrightarrow V^{\otimes k+1} \otimes V^{*\otimes l+1} \overset{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}_V\tau_{V,V^*}\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow} V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes l} \overset{Y_k\otimes X_l{}^*}{\longrightarrow} \Lambda_k \otimes S_l{}^*,$$

với τ_{V,V^*} là bện trên $V \otimes V^*$. Trên $K_{k,l}$ ta có:

$$q[l][k]d\partial + [l+1][k+1]\partial d = q^k([l-k] + \mathrm{rank}_q R) \text{ với } \mathrm{rank}_q R := P^{ij}_{ij}. \tag{1.9}$$

Nếu $-[l-k]_q \neq \text{rank}_q R$, thì đồng điều tại mọi thành phần của phức là bằng 0. Còn nếu phức có $k-l = m-n$ và $\text{rank}_q R = -[m-n]$, với (m,n) là song hạng của đối xứng Hecke, thì phức là khớp tại mọi nơi, trừ tại thành phần (m,n) có đồng điều chiều 1 trên k, gọi là siêu định thức.
Ta biết rằng các E_R-đối mô đun cũng là các H_R-đối mô đun. Trong số các H_R-đối mô đun không là E_R-đối mô đun, siêu định thức đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu và xác định chúng. Việc nghiên cứu tính chất của chuỗi Poincaré của các đại số liên kết với đối xứng Hecke có vai trò rất quan trọng trong nghiên cứu phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử liên kết.

1.6 Chuỗi Poincaré

1.6.1 Chuỗi Poincaré và chiều của các E_R-đối mô đun

Định lý 1.6.2 *Cho R là đối xứng Hecke bất kỳ thì $P_\Lambda(t)$ là phân thức có dạng*

$$P_\Lambda(t) = \frac{\Pi_{i=1}^m (1+x_i t)}{\Pi_{j=1}^n (1-y_j t)}, x_i, y_j > 0.$$

Định nghĩa 1.6.3 *Cặp (m,n) ở trên được gọi là song hạng của đối xứng Hecke.*

P.H.Hải đã chứng minh được rằng song hạng của đối xứng Hecke có vai trò quyết định phạm trù biểu diễn của nhóm lượng tử tương ứng. Vì $P_S(t), P_\Lambda(t)$ thỏa mãn $P_\Lambda(t)P_S(-t) = 1$. Nên chuỗi Poincaré của S_R cũng có mô tả tương tự như trên.
Với một phân hoạch $\lambda \in \Gamma_{m,n}$, nghĩa là $\lambda_m \geq n$, khi đó $\lambda = ((n^m) + \alpha) \cup \beta$, trong đó α có nhiều nhất m thành phần khác không, β có $\beta_1 \leq n$. Khi đó ta có

$$\dim_k I_\lambda = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq n \leq n}} (x_i + y_j) \cdot s_\alpha(x) \cdot s_{\beta'}(y) \tag{1.11}$$

ở đó $s_\alpha(x)$ (tương ứng $s_\beta(y)$) là hàm Schur trên các biến $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (tương ứng $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$), β' là phân hoạch liên hợp của β: $\beta'_i := \#\{j | \beta_j \geq i\}$.

1.6.2 Tính thuận nghịch của chuỗi Poincaré

Trong phần này, ta dùng công thức nhân ten xơ của các E_R-đối mô đun (1.3), chúng tôi chọn một E_R-đối mô đun đơn thích hợp, phân tích tích ten xơ của đối mô đun đơn này với Λ_k^*, sao cho tích ten xơ này là nửa đơn. So sánh chiều của các đối mô đun đơn trong phân tích, chúng tôi thu được kết quả sau:

Định lý 1.6.4 *Chuỗi Poincaré của các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke là hàm hữu tỷ, với tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch và mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch.*

Sử dụng công thức (1.11), ta thu được kết quả sau:

Mệnh đề 1.6.5 *Với các giả thiết của định lý 1.6.4 ở trên, các hệ số a_i, b_j là các số nguyên.*

Chương 2

Biểu diễn bất khả qui của $GL_q(2|1)$

Mục đích chương này là phân loại biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử $GL_q(2|1)$, hay là phân loại các đối mô đun đơn của đại số Hopf liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$. Công cụ để xây dựng các biểu diễn bất khả qui của H_R trong trường hợp này chủ yếu là sử dụng phức Koszul K.

2.1 Một số tính chất của phức Koszul K

Cho R là đối xứng Hecke có song hạng $(m,n) : mn \neq 0$. Chúng tôi thu được một số tính chất của phức K, nhờ đó đã xây dựng được một lớp các đối mô đun đơn trên H_R.

Mệnh đề 2.1.1 *Với $a \neq m-n$, khi đó các thành phần của phức K_a thỏa mãn đẳng cấu sau:*

$$K_{k,l} = \Lambda_k \otimes S_l{}^* \cong \mathrm{Im} d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}\partial_{k,l} : \ \textit{với } l-k=a. \tag{2.1}$$

Bổ đề 2.1.2 *Các toán tử vi phân $d_{k,l}$ của các phức $K_\bullet$ khác 0 với mọi cặp (k,l) thỏa mãn $k,l \geq 0$.*

2.2 Khai triển của tích ten xơ của các E_R-đối mô đun đơn

Dùng thuật toán Littlewood-Richardson, ta có phân tích tích ten xơ của một số lớp đối mô đun sau.

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,0,0} = \left[\begin{array}{ll} I_{m+1,n,p} + I_{m,n+1,p} + I_{m,n,p+1} & \text{nếu } m > n, \\ I_{m+1,n,p} + I_{m,n,p+1} & \text{nếu } m = n. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

$$I_{m,m,1} \otimes I_{n,0,0} = I_{m+n,m,1} + I_{m+n-1,m,2} : \quad m,n \geq 1. \tag{2.4}$$

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,k} = \begin{bmatrix} I_{m+1,n+1,p+k} + I_{m+1,n,p+k+1} & & \\ +I_{m,n+1,p+k+1} + I_{m,n,p+k+2} & \text{nếu} & m > n, \\ I_{m+1,m+1,p+k} + I_{m+1,m,p+k+1} & & \\ +I_{m,m,p+k+2} & \text{nếu} & m = n. \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Ký hiệu $(m)_u := \frac{u^m - u^{-m}}{u - u^{-1}} \in \mathbb{Z}$ với mọi m. Hệ quả từ công thức của $P_S(t)$ là

$$\mathrm{dim} I_{m,0,0} = \mathrm{dim} S_n = (m)_u + (m+1)_u.$$

Với $n \geq 1$, theo phương trình (1.11) ta có:

$$\mathrm{dim} I_{m,n,p} = ((2)_u + 2)(m - n + 1)_u. \tag{2.6}$$

2.3 Phân tích tích ten xơ với các đối ngẫu của các E_R-đối mô đun đơn

Chúng tôi đưa ra một số công thức nhân ten xơ của các E_R đối mô đun với V^*.

Bổ đề 2.3.1 *Với mỗi bộ (m,n,p) mà $m \geq n \geq 2, p \geq 1$, ta có các công thức sau là đúng*

$$I_{m,n,p} \otimes {I_{1,0,0}}^* = \begin{bmatrix} I_{m-1,n,p} + I_{m,n-1,p} + I_{m,n,p-1} & \textit{nếu} & m > n, \\ I_{m,n-1,p} + I_{m,n,p-1} & \textit{nếu} & m = n. \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Từ (2.4) ta cũng có

$$I_{m,m,1} \otimes {I_{n,0,0}}^* = I_{m,m-n,1} + I_{m,m-n+1,0}, \quad m > n \geq 1. \tag{2.8}$$

Bổ đề 2.3.2 *Phức Koszul K_1 có đồng điều khác không tại $\Lambda_2 \otimes S_1^*$.*

2.4 Tích phân và đối mô đun chẻ

Một tích phân phải trên đại số Hopf H là một đồng cấu H-đối mô đun: $H \longrightarrow k$, với H đối tác động trên chính nó bởi đối tích và đối tác động của k là đối đơn vị. Tích phân trái được định nghĩa một cách tương tự. Theo bổ đề trên, H_R tồn tại tích phân trái và cũng là tích phân phải. Trên đại số Hopf có tích phân, một lớp đối mô đun đặc biệt được nghiên cứu, và có vai trò quan trọng, đó là lớp đối mô đun chẻ. Chúng tôi thu được một số kết quả sau đây.

Bổ đề 2.4.1 *Cho R là một đối xứng Hec ke với song hạng $(2,1)$. Khi đó với bất kỳ một phân hoạch $\lambda = (m, n, 1^p) \in \Gamma_{2,1}$, đối mô đun tương ứng với phân hoạch này là I_λ, là chẻ nếu và chỉ nếu $n \geq 1$. Với mọi $n \geq 2$, $\Lambda_n = I_{1,1,n-2}$ là chẻ. $S_n = I_{n,0,0}$ không là đối mô đun chẻ với mọi n, và $I_{0,0,0} := k$ là không chẻ.*

Bổ đề sau là một công cụ để kiểm tra tính chẻ của một đối mô đun trên H_R.

Bổ đề 2.4.2 *Cho H_R là một đại số Hopf với cấu trúc đối tựa tam giác, trên H tồn tại tích một phân trái và cũng là tích phân phải. Cho M là một đối mô đun nội xạ và xạ ảnh, với $\mathrm{End}(M) \cong k$. Thì M là đối mô đun chẻ.*

Sử dụng bổ đề trên chúng tôi chứng minh được kết quả sau:

Hệ quả 2.4.3 *Các đối mô đun $\mathrm{Imd}_{k,l}$ là đơn với mọi cặp (k, l) thỏa mãn $l, k \geq 0$, $k - l \neq 1$.*

Tiếp theo chúng tôi xây dựng một lớp các đối mô đun đơn của H_R và tính chiều của các đối mô đun này. Với mỗi $l, k \geq 0$, ta ký hiệu

$$I_{1,-l,k} := \left[\begin{array}{ll} \mathrm{Imd}_{k+1,l} & \text{nếu } l > k \geq 0, \\ \mathrm{Imd}_{k+2,l+1} & \text{nếu } k > l \geq 0. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Theo Hệ quả 2.4.3, $I_{1,-l,k}$ là các đối mô đun chẻ với mọi $k \neq l \geq 0$. Ta có công thức tính chiều sau

$$\mathrm{dim} I_{1,-l,k} = ((2)_u + 2)(l+1)_u, \text{ với mọi } l > k \geq 1. \tag{2.11}$$

$$\mathrm{dim} I_{1,-l,k} = ((2)_u + 2)(l+2)_u, \text{ với mọi } k > l \geq 1. \tag{2.12}$$

Chúng tôi sử dụng các phức Koszul K_i để xây dựng các biểu diễn của nhóm lượng tử. Ta biết rằng các phức $K_i : i \neq 1$ là luôn khớp, K_1 là không khớp. Ta thu được một số kết quả đối với các phức K_i như sau.

2.5 Đồng điều của phức Koszul K_1

Trong các phần trước, ta đã có phức Koszul K_1 là không khớp tại $\Lambda_2 \otimes S_1^*$. Tiếp theo, chúng tôi thu được một số kết quả sau.

Định lý 2.5.1 *Cho R là một đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$, thì nhóm đồng điều của phức liên kết K_1 tại $\Lambda_2 \otimes S_1^*$ có chiều 1 trên k. Ký hiệu đối mô đun này là $I_{1,1,-1}$. Cho bất kỳ một đối mô đun đơn $I_{m,n,p} : m \geq n \geq 1, p \geq 1$, thì*

$$I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1} = I_{m+1,n+1,p-1}. \tag{2.13}$$

Hệ quả 2.5.2 *Đối mô đun thương* $\mathrm{Ker}\partial_1/\mathrm{Ker}d_2$ *đẳng cấu với $I_{1,-1,1} := I_{2,0,0} \otimes {I_{1,1,-1}}^*$. Do đó dãy hợp thành của $K_{2,1} = I_{1,1,0} \otimes I_{1,0,0}$ gồm $I_{1,1,-1}$, $I_{1,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{1,0,0}$.*

Bằng phương pháp chứng minh tương tự của hai kết quả trên, chúng tôi tìm được dãy hợp thành của tất cả các thành phần của phức K_1.

Định lý 2.5.3 *Cho R là một đối xứng Kecke có song hạng là $(2,1)$. Khi đó nhóm đồng điều của phức Koszul K_1 tại $\Lambda_{k+1} \otimes S_k^* : k \geq 2$ là triệt tiêu. Ngoài ra, dãy hợp thành của $\Lambda_{k+1} \otimes S_k^* : k \geq 2$ gồm $I_{1,2-k,k-2}$, $I_{1,-k,k}$ và hai bản sao của $I_{1,1-k,k-1}$.*

2.6 Phân loại các đối mô đun đơn

Trong mục trước, chúng tôi đã xây dựng được các lớp đối mô đun đơn ứng với các phân hoạch, lớp đối mô đun đơn ứng với các bộ $(1,-l,k); l \neq k \geq 0$ (xem (2.9)), và bộ $(1,1,-1)$. Với các bộ số nguyên (m,n,p) thỏa mãn $m \geq n \geq 1, p \geq 1$, ta có $I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1} = I_{m+1,n+1,p-1}$. Để định nghĩa các đối mô đun khác, trước hết ta đặt

$$I_{m,n,p} := I_{m+p,n+p,0} \otimes {I_{1,1,-1}}^{*\otimes p}.$$

Vì vậy, vấn đề còn lại là định nghĩa các đối mô đun đơn ứng với các bộ số nguyên $(m,n,0)$ mà $m \geq n$.
Với $m \geq n \geq 0$, $I_{m,n,0}$ đã được định nghĩa.
Với $0 > m \geq n$, đặt $I_{m,n,0} := {I_{-n,-m,0}}^*$.
Với $m > 0 > n$, đặt $I_{m,n,0} := I_{1,n-m+1,m-1} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes m-1}$.
Rõ ràng là các đối mô đun ở trên là đơn. Vì $\dim I_{1,1,-1} = 1$, nên ta có các công

thức tính chiều sau của $I_{m,n,p}$:

$$\dim I_{k,l,0} = \left[\begin{array}{ll} ((2)_u + 2)(k - l + 1)_u & \text{nếu } k \geq l \geq 1 \\ (k)_u + (k+1)_u & \text{nếu } k > l = 0 \\ ((2)_u + 2)(k - l_u & \text{nếu } k > 0 > l. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Mệnh đề 2.6.1 *H_R-đối mô đun đơn $I_{m,n,p}$ là chẻ nếu và chỉ nếu $(m+p)(n+p) \neq 0$.*

Bổ đề 2.6.2 *Cho $(m,n,p),(x,y,z)$ là các bộ tương ứng với các phân hoạch. Thì $I_{m,n,p} \otimes I_{1,1,-1}^{\otimes t} \cong I_{x,y,z}$ nếu và chỉ nếu $m+t = x, n+t = y, z+t = p$.*

Định lý 2.6.3 *Cho các bộ số $(m,n,p),(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$, với $m \geq n, x \geq y$. Nếu $(m,n,p) \neq (x,y,z)$, thì các đối mô đun đơn $I_{m,n,p}, I_{x,y,z}$ là không đẳng cấu với nhau.*

Định lý trên cho ta thấy rằng: ứng với mỗi bộ số nguyên (m,n,p) khác nhau, chúng tôi xây dựng được các đối mô đun $I_{m,n,p}$ thực sự là khác nhau.

Hệ quả 2.6.4 *Luật đối ngẫu sau là đúng.*

$${I_{m,n,p}}^* = I_{-n,-m,-p}. \tag{2.25}$$

2.7 Tính đầy đủ của tập hợp $\{I_{m,n,p} : m \geq n; m,n,p \in \mathbb{Z}\}$

Như vậy ta đã xây dựng được một tập các đối mô đun đơn $\{I_{m,n,p} : m,n,p \in \mathbb{Z}, m \geq n\}$. Tiếp theo chúng tôi sẽ xác định công thức cho tích ten xơ của các đối mô đun đơn nay với ${I_{1,0,0}}^*$ và từ đó suy ra được rằng tập các đối mô đun đơn này là tất cả các đối mô đun đơn trên H_R.

Bổ đề 2.7.1
- *1. Dãy hợp thành của $I_{m,1,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$: $m \geq 2$ gồm $I_{m-1,1,0}$, $I_{m,1,-1}$, $I_{m,-1,1}$ và hai bản sao của $I_{m,0,0}$.*
- *2. Với $n \geq 2$, thì dãy hợp thành của $I_{1,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^*$ gồm $I_{1,-n-1,0}$, $I_{-1,-n,1}$, $I_{1,-n,-1}$ và hai bản sao của $I_{0,-n,0}$.*
- *3. Với $m \geq 2, n \geq 1$ ta có phân tích ten xơ sau*

$$I_{m,-n,0} \otimes {I_{1,0,0}}^* = I_{m-1,-n,0} + I_{m,-n-1,0} + I_{m,-n,-1}. \tag{2.26}$$

Từ các kết ở trên, chúng tôi thu được dãy hợp thành của tích ten xơ $I_{m,n,0} \otimes V^*$ là chỉ chứa các đối mô đun đơn mà chúng tôi đã xây dựng. Vì vậy định lý sau được chứng minh.

Định lý 2.7.2 *Tập hợp* $\{I_{m,n,p} : m \geq n, m, n, p \in \mathbb{Z}\}$ *là tất cả các đối mô đun đơn trên* H_R.

Chương 3

Phức Koszul kép và xây dựng các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$

Để chuẩn bị cho việc xây dựng tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$ trong chương sau, chúng tôi đưa ra trong chương này một mô tả tường minh các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$.

3.2 Phức Koszul kép

Hai phức Koszul K, L đã giới thiệu trong Chương 1, có thể kết hợp lại thành một phức kép với tất cả các dòng và các cột, trừ cột đầu tiên đều là khớp. Sử dụng tính chất của các phức này, chúng tôi xây dựng tường minh tất cả các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$. Để đơn giản ta sẽ dùng dấu "$\cdot$" để ký hiệu tích ten xơ. Cố định một số nguyên $a \geq 1$. Ta có có sơ đồ sau với tất cả các hàng là các phức Koszul $K_\bullet$ nhân ten xơ với $S_\bullet$ và các cột là các phức Koszul $L_\bullet$ nhân ten xơ với $S^*_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 \arrow[r] & S_a^* \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_1 \cdot S^*_{a+1} \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_2 \cdot S^*_{a+2} \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_3 \cdot S^*_{a+3} \arrow[u] \arrow[r, "d"] & \Lambda_4 \cdot S^*_{a+4} \dots \arrow[u] \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \Lambda_1 \cdot S^*_{a+1} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_1 \cdot S^*_{a+2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_2 \cdot S^*_{a+3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_1 \cdot \Lambda_3 \cdot S^*_{a+4} \dots \arrow[u, "P"] \\
 & & 0 \arrow[u] \arrow[r] & S_2 \cdot S^*_{a+2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_2 \cdot \Lambda_1 \cdot S^*_{a+3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "d"] & S_2 \cdot \Lambda_2 \cdot S^*_{a+4} \dots \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Các hình vuông trong sơ đồ trên là giao hoán.
Với siêu nhóm $GL(3,1)$, tất cả các hàng trong sơ đồ trên là các phức K_a, các phức này là khớp vì $a \neq -2$. Vì vậy sơ đồ (3.1) là một phức kép với tất cả các dòng và cột (trừ cột đầu tiên) đều khớp.
Dùng các toán tử vi phân ∂ và Q, ta cũng có một phức Koszul kép sau đây:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] \\
0 & S_a^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_3 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & \Lambda_4 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] \\
 & 0 & S_1 \cdot S_{a+1}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] & S_1 \cdot \Lambda_3 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"'] \arrow[d, dashed, "Q"] \\
 & & 0 & S_2 \cdot S_{a+2}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] & S_2 \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+3}^* \arrow[l, dashed, "\partial"'] & S_2 \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+4}^* \cdots \arrow[l, dashed, "\partial"']
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

3.3 Một số tính chất của phức Koszul kép

Từ các kết quả thu được trong hai mệnh đề dưới đây, chúng tôi đưa ra một xây dựng tường minh một lớp các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$. Kết hợp hai phức mà chúng tôi đã giới thiệu ở trên với nhau vào cùng một sơ đồ, khi đó ta nhận được sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
S_{i-1} \cdot S_{a+i-1}^* \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i-1}"] & S_{i-1} \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+i}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i-1}"] \arrow[r, shift left, "d_{1,a+i}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] & S_{i-1} \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+i+1^*} \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{1,a+i}"] \arrow[r, shift left, "d_{2,a+i+1}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] & \cdots \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{2,a+i+1}"] \\
 & S_i . S_{a+i}^* \arrow[u, hook, shift left, "P"] \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i}"] & S_i . \Lambda_1 . S_{a+i+1}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i}"] \arrow[u, shift left, "P"] \arrow[r, shift left, "d_{1,a+i+1}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] & S_i \cdot \Lambda_2 \cdot S_{a+i+2}^* \arrow[l, dashed, shift left, "\partial_{1,a+i+1}"] \arrow[d, dashed, shift left, "Q"] \\
 & & S_{i+1} . S_{a+i+1}^* \arrow[u, hook, shift left, "P"] \arrow[r, hook, shift left, "d_{0,a+i+1}"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_1 \cdot S_{a+i+2}^* \arrow[l, two heads, dashed, shift left, "\partial_{0,a+i+1}"] \arrow[u, shift left, "P"]
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Sử dụng tính chất của các toán tử vi phân trong hai phức kép ở trên, chúng tôi thu được một số kết quả sau đây.

Mệnh đề 3.3.1 *Ánh xạ hợp thành* $\partial PQd : S_i \cdot S^*_{a+i} \longrightarrow S_i \cdot S^*_{a+i}$ *trong sơ đồ (3.4) là một đẳng cấu với mọi* $i \geq 0$*. Khi đó ta có* $S_i \cdot S^*_{a+i}$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{i+1} \cdot S^*_{a+i+1}$.

Phương pháp chứng minh: Chúng tôi chứng minh rằng các ánh xạ cần chứng minh trong mệnh đề là chéo hóa được, với tất cả các giá trị riêng là khác không. Xét sơ đồ trong (3.4) như là dãy khớp của các phức và chẻ nó ra thành các dãy khớp ngắn.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ker}P_{i,k} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d'_{k,i+k+a}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d'_{k+1,i+k+a+1}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & \mathrm{Ker}P_{i,k+2} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "Q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d_{k-1,i+k+a}"] \arrow[u, shift left, "P_{i+1,k-1}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_k \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d_{k,i+k+a+1}"] \arrow[u, shift left, "P_{i+1,k}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & S_{i+1} \cdot \Lambda_{k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "P_{i+1,k+1}"] \arrow[d, shift left, "Q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k-1} \cdot S^*_{i+k+a} \arrow[r, "d'_{k-1,i+k+a}"] \arrow[u, hook, shift left, "i"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k} \cdot S^*_{i+k+a+1} \arrow[r, "d'_{k,i+k+a+1}"] \arrow[u, hook, shift left, "i"] & \mathrm{Ker}P_{i+1,k+1} \cdot S^*_{i+k+a+2} \arrow[r] \arrow[u, hook, shift left, "i"] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

Trong sơ đồ trên, chúng tôi thu được kết quả sau:

Mệnh đề 3.3.2 *Ánh xạ hợp thành*

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

(với $i \geq 0, k \geq 0$*) trong sơ đồ (3.6) là một đẳng cấu. Khi đó ta có* $\mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k,a+i+k+1}$.

Tương tự như phương pháp chứng minh của mệnh đề ở trên, chúng tôi cũng chứng minh được các ánh xạ trong mệnh đề là chéo hóa được với các trị riêng là khác không.

3.4 Đặc trưng của các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$

Ta đã biết rằng một biểu diễn của $GL(m|n)$ là bất khả qui nếu nó là bất khả qui như là của $\mathfrak{gl}(m|n)$ với trọng cao nhất với hệ số nguyên. Vì vậy các kết quả sau mà chúng tôi giới thiệu là trên siêu đại số Lie $\mathfrak{gl}(m|n)$.

3.4.1 Đặc trưng của biểu diễn điển hình

Theo công thức tính đặc trưng của Kac, với các trọng trội nguyên điển hình λ, ta đều tính được cụ thể $\mathrm{ch}V(\lambda)$.

3.4.2 Đặc trưng của biểu diễn không điển hình

Trong mục này chúng tôi tính toán được chi tiết đặc trưng của tất cả các biểu diễn bất khả qui không điển hình của $GL(3|1)$.Các công thức đặc trưng cho trường hợp này là rất phức tạp. Chi tiết đã được chúng tôi mô tả trong luận án.

3.5 Xây dựng các biểu diễn bất khả qui của $GL(3|1)$

3.5.1 Xây dựng biểu diễn bằng phương pháp tổ hợp

Siêu không gian V với siêu chiều $(3|1)$ là một biểu diễn bất khả qui của $G := GL(3|1)$. Bằng phương pháp tổ hợp ta có $V^{\otimes k} = \oplus_{\lambda\in\Gamma_{3,1}} I_\lambda^{\oplus C_\lambda}$, với I_λ là mô đun đơn, $\Gamma_{3,1}$ là tập tất cả các phân hoạch thỏa mãn $\lambda_4 \leq 1$. Với mỗi $I_\lambda, \lambda \in \Gamma_{3,1}$, thì I_λ có trọng cao nhất là λ. Từ ta cũng xác định được các trọng cao nhất của I_λ^*.

3.5.2 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul K

Từ các phức K_a với $a \neq 2$ là khớp, ta có $\Lambda_k.S_l^* = \mathrm{Im}d_{k-1,l-1} \oplus \mathrm{Im}d_{k,l}$. Hệ quả của điều này ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.5.1 *Mô đun* $\mathrm{Im}d_{k+1,l+1}$ *là đơn với mọi* (k,l) *thỏa mãn* $l,k \geq 1, k-l \neq 2$.

Sử dụng mệnh đề này, chúng tôi thu được: với mỗi trọng trội nguyên $\lambda = (m,m,-p|0)$, xây dựng được một biểu diễn có đặc trưng bằng đặc trưng của $V(\lambda)$.

3.5.3 Xây dựng biểu diễn bằng cách sử dụng phức Koszul kép

Sử dụng Mệnh đề 3.3.1, với mỗi trọng cao nhất có dạng $\lambda = (n,0,-p|0)$ ta xây dựng được một biểu diễn có đặc trưng bằng với đặc trưng của $V(\lambda)$. Sử dụng Mệnh đề 3.3.2, với mỗi trọng cao nhất $\lambda = (m+a,m,-p|0)$, xây dựng được các biểu diễn có đặc trưng bằng đặc trưng của $V(\lambda)$.
Tóm lại: với bất kỳ một trọng cao nhất $(m,n,p|q)$ nào, chúng tôi đã xây dựng được một biểu diễn có trọng cao nhất là $\lambda = (m,n,p|q)$, có đặc trưng bằng

với đặc trưng của biểu diễn bất khả qui $V(\lambda)$. Do đó tập các biểu diễn xây dựng được là bất khả qui và là tất cả các biểu diễn của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$.

Chương 4

Biểu diễn bất khả qui của $GL_q(3|1)$

Mục đích trong chương này là bước đầu giải quyết bài toán phân loại các biểu diễn bất khả qui của đại số Hopf liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(3,1)$. Với phương pháp đã sử dụng trong Chương 3, nhờ tính chất của các phức Koszul K, L là các phức Koszul kép, chúng tôi đã xây dựng được các biểu diễn của $GL_q(3|1)$, các biểu diễn này được đánh số bởi các bộ số nguyên (m, n, p, p) thỏa mãn điều kiện: $m \geq n \geq p, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

4.1 Một số tính chất của phức Koszul kép

Tương tự như trong Chương 3, trong Chương 4, các phức Koszul K, L, được xét đến là các phức Koszul trong trường hợp lượng tử. Chúng tôi cũng thu được một số kết quả sau. Các kết quả này đóng vai trò quyết định trong việc xây dựng các biểu diễn của $GL_q(3|1)$.

Mệnh đề 4.1.1 *Ánh xạ hợp thành* $g := \partial PQd : S_k \cdot S_b^* \longrightarrow S_k \cdot S_b^*$ *trong sơ đồ (3.4) là một đẳng cấu với mọi* $k \geq 0$. *Khi đó ta có* $S_k \cdot S_b^*$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{k+1} \cdot S_{b+1}^*$.

Mệnh đề 4.1.2 *Ánh xạ hợp thành*

$$P\partial dQ : \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$$

trong sơ đồ (3.6) là một đẳng cấu. Khi đó $\mathrm{Ker}P_{i,k+1} \cdot S^*_{a+i+k+1}$ *đẳng cấu với một thành phần trực tiếp của* $S_{i+1} \cdot \mathrm{Im}d_{k,a+i+k+1}$.

4.2 Xây dựng các biểu diễn của $GL_q(3|1)$

4.2.1 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phân hoạch

Với $m \geq n \geq p \geq 0$, $I_{m,n,p,0} := I_\lambda$, với $\lambda = (m,n,p)$.
Với $0 \geq m \geq n \geq p$, $I_{m,n,p,0} := I^*_{-p,-n,-m,0}$.
Với $n = p = 0$, $I_{m,0,0,0} := S_m$.
Với $m = n = 0, p < 0$, đặt $I_{0,0,p,0} := S^*_{-p}$.

4.2.2 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul K

Sử dụng phức Koszul K_a với $a \neq 2$ chúng tôi xây dựng được tập các biểu diễn được đánh số bởi các bộ số nguyên $(m,m,-p,0)$:$m,p \geq 1$. Với $p = 0$, đặt $I_{m,0,0,0} := S_m$.

4.2.3 Xây dựng biểu diễn bằng sử dụng phức Koszul kép

Sử dụng phức Koszul kép và Mệnh đề 4.1.1, chúng tôi xây dựng được các biểu diễn được đánh số bởi tập các bộ số nguyên có dạng $(k,0,-m,0) : k,m \geq 1$
Sử dụng phức Koszul kép K và Mệnh đề 4.1.2, chúng tôi xây dựng được các biểu diễn được đánh số bởi tập các bộ số nguyên có dạng $(m+a,m,-p,0)$: $m,a,p \geq 1$

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi thu được các kết quả sau:

1. Chứng minh được chuỗi Poincaré của các đại số toàn phương liên kết với đối xứng Hecke có tính chất thuận nghịch và đối thuận nghịch (tử thức là đa thức có tính chất thuận nghịch, mẫu thức là đa thức có tính chất đối thuận nghịch), và các đa thức tử thức và mẫu thức là có hệ số nguyên.

2. Phân loại được tất cả các biểu diễn bất khả qui của nhóm lượng tử liên kết với đối xứng Hecke có song hạng $(2,1)$.

3. Chứng minh được một số tính chất của phức Koszul kép, xây dựng tường minh tất cả các biểu diễn bất khả qui của siêu nhóm tuyến tính $GL(3|1)$. Bước đầu xây dựng được một lớp các biểu diễn của siêu nhóm tuyến tính lượng tử $GL_q(3|1)$.

Các công trình liên quan đến luận án

1. N. P. Dung and P.H.Hai . On the Poincaré Series of Quadratic Algebras Associated to Hecke Symmetries, Int. Math. Res. Noti. 2003, No. 40, 2193 - 2203.
2. N. P. Dung and P.H.Hai. Irreducible representations of Quantum Linear Groups of type $A_{1|0}$. J. Alg. 2004, No. 282, 809-830
3. N. P. Dung Double Koszul Complex and Construction of Irreducible Representations of $\mathfrak{gl}(3|1)$, Proc. AMS. to appear