BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

ĐẬU HOÀNG HƯNG

MIỀN B-CHÍNH QUI ĐỐI VỚI CÁC HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI VÀ TOÁN TỬ MONGE-AMPÈRE ĐỐI VỚI HÀM DELTA ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI ĐỊA PHƯƠNG

CHUYÊN NGÀNH: Toán Học
MÃ SỐ: 62 46 01 01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN TOÁN HỌC

VINH – 2010

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Người hướng dẫn khoa học

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biên 3:

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm Luận án cấp Nhà nước
Trường đại học Vinh
Vào hồi ... giờ ... phút, ngày ... tháng ... năm 2010

Có thể tìm hiểu Luận án tại:
Trường Đại học Vinh
Thư viện Quốc gia

CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ

1. Nguyen Quang Dieu, Nguyen Thac Dung and Dau Hoang Hung (2005), "B-regularity of certain domains in $\mathbb{C}^n$", *Ann. Pol. Math.*, **86**, 137-152.
2. Nguyen Quang Dieu, Dau Hoang Hung (2008), "Jensen measures and unbounded B-regular domains in $\mathbb{C}^n$", *Ann. Inst. Fourier,* **58**, 1383-1406.
3. Nguyen Quang Dieu, Dau Hoang Hung (2008),"A class of delta-plurisub harmonic functions and the complex Monge-Ampere operator", *Acta Math. Vietnam.*, **33**, 123-132.

LỜI NÓI ĐẦU

Trong lý thuyết đa thế vị, bài toán Dirichlet cho các hàm đa điều hoà dưới giữ một vị trí quan trọng. Đây là mở rộng tự nhiên từ bài toán Dirichlet cho hàm điều hoà trong lý thuyết thế vị thực: *"Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm liên tục nhận giá trị thực trên $\partial\Omega$. Tìm hàm u liên tục trên $\overline{\Omega}$, khả vi cấp hai trên Ω và thỏa mãn*

$$\begin{cases} u \text{ điều hoà trên } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = f''. \end{cases} \tag{1}$$

Bài toán Dirichlet thực đã được nghiên cứu thấu đáo vào những năm đầu của thế kỷ 20. Kết quả quan trọng của Brelot và Perron cho chúng ta những đặc trưng hình học của Ω sao cho bài toán Dirichlet(thực) là giải được đối với mọi giá trị biên f liên tục trên $\partial\Omega$. Những miền Ω như vậy được gọi là *chính qui.* Hơn nữa, nghiệm u của bài toán (nếu có) được xác định là bao trên các hàm đa điều hòa dưới bị làm trội trên biên bởi f. Cụ thể hơn

$$u(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{SH}(\Omega), \limsup_{x \to a} v(x) \leqslant f(a), \forall a \in \partial\Omega\}, \forall z \in \Omega$$

trong đó, $\mathcal{SH}(\Omega)$ là tập hợp các hàm điều hoà dưới trên Ω.

Hơn 30 năm sau, Bremermann đã mở rộng phương pháp xây dựng nghiệm của Brelot-Perron từ bài toán Dirichlet cho hàm điều hoà trong lý thuyết thế vị thực cho bài toán Dirichlet đối với hàm đa điều hoà dưới trong lý thuyết đa thế vị trên các miền giả lồi chặt bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Cụ thể, Bremermann đã chứng minh rằng, nếu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn, giả lồi chặt và $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ thì $u_{f,\Omega}$ được xác định bởi

$$u_{f,\Omega}(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{PSH}(\Omega), \limsup_{x \to a} v(x) \leqslant f(a), \forall a \in \partial\Omega\}, \;\; z \in \Omega$$

là một hàm đa điều hoà dưới trên Ω và thoả mãn $\lim_{x\to a} u_{f,\Omega}(x) = f(a)$ với mọi $a \in \partial\Omega$, ở đây $\mathcal{PSH}(\Omega)$ là tập hợp các hàm đa điều hoà dưới trên Ω. Hơn nữa hàm đa điều hòa dưới $u_{f,\Omega}$ còn có tính chất *cực đại.*

Bài toán Dirichlet phức (hay là bài toán Dirichlet suy rộng) được Bremermann đặt ra như sau: *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và f là một hàm liên tục, nhận giá trị thực trên $\partial\Omega$. Tìm hàm u liên tục trên $\overline{\Omega}$ sao cho*

$$\begin{cases} u \text{ là đa điều hoà dưới cực đại trên } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = f. \end{cases} \tag{2}$$

Chú ý rằng, Bremermann chưa khẳng định được tính liên tục của $u_{f,\Omega}$ trên Ω. Phải vào năm 1968, Walsh trong mới chứng minh được $u_{f,\Omega}$ liên tục trên $\overline{\Omega}$ khi và chỉ khi hàm này liên tục tại các điểm biên của Ω. Kết hợp với kết quả trước đó của Bremermann, chúng ta có $u_{f,\Omega}$ liên tục trên $\overline{\Omega}$ và $u_{f,\Omega} = f$ trên $\partial\Omega$ với mọi miền giả lồi chặt, bị chặn Ω. Hay nói cách khác, bài toán Dirichlet phức là giải được trên các miền giả lồi chặt. Cũng trong khoảng thời gian này, Bedford và Taylor đã xây dựng toán tử Monge-Ampere phức $(dd^c)^n$ trên lớp các hàm đa điều hoà dưới bị chặn địa phương trên tập mở của $\mathbb{C}^n$. Một kết quả sâu sắc của Bedford và Taylor nói rằng một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương u là cực đại khi và chỉ khi $(dd^c u)^n = 0$. Điều này cho thấy toán tử Monge-Ampere trong lý thuyết đa thế vị đóng vai trò như toán tử Laplace trong lý thuyết thế vị cổ điển.

Vào năm 1987, Sibony đã đưa ra những đặc trưng của một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ để trên miền đó bài toán Dirichlet cho các hàm đa điều hoà dưới có lời giải. Lớp miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ có tính chất như thế được gọi là *B-chính qui.* Từ đó đến nay, miền B-chính qui bị chặn đã và đang trở thành đối tượng được sự quan tâm đặc biệt của nhiều nhà toán học. Những công trình nghiên cứu gần đây của Sibony, Blocki, Cegrell, L. M. Hải, Wikstrom, N. Q. Diệu, Gogus, Tommasini, Simioniuc ... đã chứng tỏ miền B-chính qui trong $\mathbb{C}^n$ đóng vai trò quan trọng trong nhiều bài toán của lý thuyết đa thế vị và giải tích phức nhiều biến. Có một số vấn đề nảy sinh từ những hướng nghiên cứu kể trên như:

- Tìm những ví dụ *cụ thể* các miền B-chính qui bị chặn.

- Dựa trên kết quả kể trên của Tomassini và Simioniuc, liệu chúng ta có thể xây dựng một lý thuyết miền B-chính qui cho các miền *không bị chặn* hay không?

- Toán tử Monge-Ampere có thể xác định được trên những lớp hàm rộng hơn các hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương hay không?

Những vấn đề nói trên là lý do để chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu **"Miền B-chính qui đối với các hàm đa điều hoà dưới và toán tử Monge-Ampere đối với hàm delta đa điều hoà dưới địa phương"** làm đề tài luận án tiến sỹ.

2. Mục đích nghiên cứu

-Mô tả tường minh các miền Reinhardt và Hartogs B-chính qui trong $\mathbf{C}^n$.

-Xây dựng khái niệm miền B-chính qui không bị chặn và chứng minh một số đặc trưng hình học của lớp các miền này.

-Chúng tôi cũng xây dựng toán tử Monge-Ampere đối với hàm delta đa điều hòa dưới.

3. Đối tượng nghiên cứu

Miền B-chính qui bị chặn và không bị chặn trong $\mathbf{C}^n$, độ đo Jensen đối với hàm đa điều hòa dưới, hàm delta đa điều hoà dưới và toán tử Monge-Ampere cho lớp hàm này.

4. Phạm vi nghiên cứu

Luận án nghiên cứu các đối tượng thuộc lĩnh vực lý thuyết đa thế vị và giải tích phức nhiều biến.

5. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp nghiên cứu lý thuyết thông qua việc vận dụng một cách linh hoạt các kết quả sâu sắc của Lý thuyết đa thế vị phức , Giải tích phức, Giải tích hàm, Lý thuyết độ đo. Ngoài ra chúng tôi còn tìm kiếm những công cụ, kỹ thuật và phương pháp chứng minh mới nhằm khắc phục những khó khăn nảy sinh trong quá trình nghiên cứu.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần giải quyết bài toán Dirichlet đối với hàm đa điều hoà dưới trên các miền không bị chặn và xây dựng toán tử Monge-Ampere cùng với một số tính chất cơ bản của nó trên lớp hàm delta đa điều hoà dưới địa phương.

7. Tổng quan và cấu trúc luận án

7.1.Tổng quan luận án

Một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *miền B-chính qui* nếu mọi hàm nhận giá trị thực, liên tục trên $\partial\Omega$ có thể thác triển tới một hàm đa điều hoà dưới trên Ω và liên tục trên $\overline{\Omega}$. Khái niệm miền B-chính qui bị chặn lần đầu tiên được Sibony đưa ra trong bài báo *"Une classe de domaines pseudoconvexes"* trên tạp chí Duke.J, **55**, 299-319. Cũng trong bài báo này Sibony đã đưa ra đặc trưng sau đây của miền B-chính qui bị chặn trong $\mathbb{C}^n$: *"Một miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui nếu và chỉ nếu với mọi điểm biên $z_0 \in \partial\Omega$ tồn tại một cản đa điều hoà dưới tại z_0".*

Như vậy, ta có thể chứng tỏ một miền bị chặn là B-chính qui bằng cách xây dựng một cản đa điều hoà dưới tại mỗi điểm biên của miền đó.

Vì những lý do như vậy, trước hết luận án đi sâu vào nghiên cứu sự tồn tại một cản đa điều hoà dưới tại mỗi điểm biên của miền bị chặn thông qua việc nghiên cứu độ đo Jensen và mối liên hệ giữa độ đo Jensen và bao trên đa điều hoà dưới (Mệnh đề 1.2.19). Trên cơ sở đó, chúng tôi đã nghiên cứu và đưa ra điều kiện cần và đủ để một miền siêu lồi Reinhardt bị chặn là miền B-chính qui (Định lý 1.3.2), đưa ra một số điều kiện đủ để một miền Hartogs bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui (Định lý 1.3.7), đưa ra điều kiện đủ để bảo toàn tính chất B-chính qui qua ánh xạ chỉnh hình (Mệnh đề 1.3.11). Các kết quả trên đã được công bố trong [1].

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tính chất B-chính qui của lớp các miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Trước hết, chúng tôi đưa vào khái niệm miền không bị chặn B-chính qui, miền không bị chặn B-chính qui địa phương và nghiên cứu các tính chất đặc trưng của miền B-chính qui địa phương thông qua việc nghiên cứu độ đo Jensen và mối liên hệ giữa độ đo Jensen và bao trên đa điều hoà dưới. Để thực hiện được điều này, chúng tôi đã mở rộng định lý đối ngẫu cho trường hợp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ (Định lý 1.2.17). Trên cơ sở đó, chúng tôi đã tìm được điều kiện để một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui địa phương (Mệnh đề 2.2.2). Đồng thời chúng tôi cũng mở rộng một số kết quả của Simioniuc và Tomassini để đưa ra một tính chất đặc trưng của miền B-chính qui địa phương (Mệnh đề 2.2.5, 2.2.6). Sau đó, chúng tôi đưa ra được hai lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà trên đó bài toán Dirichlet giải được (Định lý 2.3.5, Mệnh đề 2.3.8). Từ Định lý 2.3.5, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu một số miền B-chính qui không bị chặn đặc biệt trong $\mathbb{C}^n$ (Mệnh đề 2.4.2, 2.4.3). Các kết quả này đã được công bố trong [2].

Bên cạnh nghiên cứu tính chất B-chính qui cho miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, chúng tôi đã khảo sát một số tính chất đối với lớp hàm delta đa điều hoà dưới. Trước hết, chúng tôi xây dựng toán tử Monge-Ampere cho lớp hàm delta đa điều hoà dưới địa phương (Mệnh đề 3.2.1). Sau đó chúng tôi nghiên cứu và mở rộng định lý hội tụ đơn điệu (Định lý 3.2.3) và nguyên lý so sánh (Định lý 3.2.6) đối với toán tử Monge-Ampere phức của hàm delta đa điều hoà dưới địa phương. Các kết quả này đã được công bố trong [3].

7.2. Cấu trúc luận án

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận và danh mục các bài báo khoa học của NCS thì tóm tắt luận án của chúng tôi được trình bày gồm 3 chương.

Chương 1: Miền B-chính qui bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 2: Độ đo Jensen và miền B-chính qui không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 3: Toán tử Monge-Ampere đối với hàm delta đa điều hoà dưới địa phương.

CHƯƠNG 1

MIỀN B-CHÍNH QUI BỊ CHẶN TRONG $\mathbb{C}^N$

1.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

Trong mục này chúng tôi trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản cần dùng trong những phần sau.Trước hết, chúng tôi nhắc lại khái niệm về sự hội tụ của độ đo.

1.1.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian metric compact và $\{\mu_j\}$ là dãy độ đo Borel xác suất trên X. Khi đó, dãy $\{\mu_j\}$ được gọi là *hội tụ yếu** tới độ đo Borel xác suất μ trên X nếu

$$\lim_{j\to\infty}\int_X \varphi d\mu_j = \int_X \varphi d\mu,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{C}(X).$$

Trong trường hợp này ta ký hiệu

$$\mu_j \xrightarrow{\text{yếu}^*} \mu.$$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm về hàm đa điều hoà dưới cực đại.

1.1.10 Định nghĩa. Cho Ω là tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Một hàm đa điều hoà dưới u xác định trên Ω được gọi là *cực đại* nếu với mọi miền con compact tương đối G của Ω và mọi hàm đa điều hoà dưới v trên G sao cho $v^*\leqslant u$ trên ∂G ta có $v\leqslant u$ trên G, trong đó $v^*(z)=\limsup_{\xi\to z}v(\xi)$.

Tập hợp tất cả các hàm đa điều hoà dưới cực đại xác định trên Ω được ký hiệu là $\mathcal{MPSH}(\Omega)$.

Ký hiệu các toán tử $d=\partial+\overline{\partial}$ và $d^c=i(\overline{\partial}-\partial)$. Các toán tử này có thể được hiểu theo nghĩa *suy rộng*. Sau đây chúng tôi trình bày lại một số khái niệm và kết quả cơ bản của toán tử Monge-Ampere phức được đưa ra bởi Bedford và Taylor vào những năm đầu thập kỷ 80 của thế kỷ trước.

1.1.13 Mệnh đề. *Cho $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ và $u\in\mathcal{L}^\infty_{loc}(\Omega)\cap\mathcal{PSH}(\Omega)$. Với mọi dòng đóng dương T song bậc (k,k), $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ ta xác định $dd^cu\wedge T=dd^c(uT)$. Khi đó, $dd^cu\wedge T$ là một dòng dương đóng, song bậc $(k+1,k+1)$.*

Bằng phép quy nạp ta thấy $(dd^c u)^n$ là một độ đo Borel chính qui, dương nếu u là một hàm đa điều hòa dưới bị chặn địa phương.

Sau khi đưa ra khái niệm trên, Bedford và Taylor đã xây dựng và chứng minh một số tính chất quan trọng của toán tử Monge-Ampere như định lý hội tụ, nguyên lý so sánh,... Các kết quả kinh điển này được chúng tôi mở rộng phần nào cho lớp các hàm delta đa điều hòa dưới địa phương trong Chương 3.

1.2 Miền B-chính qui bị chặn và tập compact B-chính qui trong $\mathbb{C}^n$

Nội dung chủ yếu của mục này là trình bày và thiết lập mối liên hệ giữa miền B-chính qui bị chặn và tập compact B-chính qui trong $\mathbb{C}^n$. Trước hết, chúng tôi trình bày lại các khái niệm và tính chất của miền chính qui theo nghĩa *thực*, đây là lớp miền trong $\mathbb{R}^n$ mà ở đó bài toán Dirichlet thực có nghiệm.

1.2.1 Định lý. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và f là một hàm liên tục nhận giá trị thực trên $\partial\Omega$. Ta xác định*

$$u_{f,\Omega}(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{SH}(\Omega), v^*_{|\partial\Omega} \leqslant f\}, \ \forall z \in \Omega.$$

Khi đó, $u_{f,\Omega}$ là điều hòa trên Ω. Hơn nữa, $u_{f,\Omega}$ còn là nghiệm (nếu có) của bài toán Dirichlet.

Hàm $u_{f,\Omega}$ được gọi là *thác triển Perron* của f.

Nhờ phương pháp thác triển Perron, để giải bài toán Dirichlet thực, chúng ta chỉ cần kiểm tra lại liệu $\lim_{x\to z} u_{f,\Omega}(x) = f(z)$ với mọi điểm biên $z \in \partial\Omega$ hay không? Nhằm giải quyết vấn đề trên Perron và Brelot đưa ra khái niệm sau.

1.2.2 Định nghĩa. Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, điểm $x_0 \in \partial\Omega$ được gọi là *điểm chính qui* nếu với mọi hàm $f \in \mathcal{L}^\infty(\partial\Omega)$, liên tục tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} u_{f,\Omega}(x) = f(x_0)$.

Một miền Ω bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là *chính qui* nếu mọi điểm biên là điểm chính qui.

Liên quan đến miền chính qui trong $\mathbb{R}^n$ chúng ta có định lý sau thuộc về Perron và Bouligand.

1.2.3 Định lý. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(i) Ω là chính qui,

(ii) Với mọi $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ hàm $u_{f,\Omega}$ liên tục trên $\overline{\Omega}$, điều hòa trên Ω và thỏa mãn $u_{f,\Omega|\partial\Omega} = f$,

(iii) Tồn tại hàm điều hoà dưới âm v trên Ω sao cho $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} v(x) = 0$.

Bằng cách sử dụng phương pháp xây dựng bao Perron để xét bài toán Dirichlet phức cho hàm đa điều hoà dưới xác định trên miền giả lồi chặt, bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, Bremermann đã chứng minh được: *"Nếu Ω là một miền giả lồi chặt bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ thì bao trên $u_{f,\Omega}$ xác định bởi công thức*

$$u_{f,\Omega}(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{PSH}(\Omega), v^*_{|\partial\Omega} \leqslant f\}$$

là một thác triển đa điều hoà dưới của f, liên tục trên $\partial\Omega$".

Tuy nhiên, nếu thay giả thiết Ω là một miền giả lồi chặt, bị chặn bởi một lớp miền rộng hơn thì kết quả này không đúng nữa. Hay nói cách khác, phương pháp thác triển Perron không còn hiệu lực đối với bài toán Dirichlet phức. Đến năm 1968, Walsh đã bổ sung một số điều kiện để áp dụng phương pháp thác triển Perron cho bài toán Dirichlet phức.

1.2.5 Định lý. *Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Nếu bao trên $u_{f,\Omega}$ xác định bởi công thức*

$$u(z) = u_{f,\Omega}(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{PSH}(\Omega), v^*_{|\partial\Omega} \leqslant f\}$$

thoả mãn $u^* = u_* = f$ trên $\partial\Omega$ thì u liên tục trên Ω, ở đây $u_*(z) = \liminf_{\xi\to z} u(\xi)$.

Hàm $u_{f,\Omega}$ được gọi là *thác triển Perron-Bremermann* của f.

Việc nghiên cứu bài toán Dirichlet phức tiếp tục được nhiều nhà toán học trên thế giới dưới quan tâm. Đặc biệt, năm 1987 trong bài báo "Une classe de domaines pseudoconvexes", *Duke Math. J.*, **55**, Sibony đã đưa ra một số đặc trưng hình học để trên một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ bài toán Dirichlet phức có lời giải.

1.2.6 Định nghĩa. Một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *B-chính qui* nếu mọi hàm nhận giá trị thực, liên tục trên $\partial\Omega$ có thể thác triển tới một hàm đa điều hoà dưới trên Ω và liên tục trên $\overline{\Omega}$.

1.2.7 Định nghĩa.(i) Tập compact K trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là *B-chính qui* nếu mọi hàm liên tục trên K có thể xấp xỉ đều trên K bởi các hàm đa điều hoà dưới liên tục trên một lân cận của K.

(ii) Tập con đóng địa phương K được gọi là *B-chính qui địa phương* nếu với mọi $z \in K$ tồn tại một hình cầu U tâm z sao cho $K \cap \overline{U}$ là B-chính qui.

Định lý sau đây của Sibony cho ta mối liên hệ về tính B-chính qui trong Định nghĩa 1.2.6 và Định nghĩa 1.2.7.

1.2.10 Định lý. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Nếu Ω là miền siêu lồi và $\partial\Omega$ là tập compact B-chính qui thì Ω là miền B-chính qui. Ngược lại, nếu Ω là miền B-chính qui thì nó là miền siêu lồi, và nếu thêm điều kiện $\partial\Omega$ thuộc lớp $\mathcal{C}^1$ thì $\partial\Omega$ là tập compact B-chính qui.*

Cùng với Sibony, Blocki đã đưa ra những tính chất đặc trưng của miền B-chính qui bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

1.2.11 Định lý. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(i) Ω là B-chính qui,

(ii) Với mọi $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ tồn tại $u \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sao cho $u_{|\partial\Omega} = f$,

(iii) Với mỗi $z_0 \in \partial\Omega$ tồn tại một cản đa điều hoà dưới tại z_0 đối với Ω,

(iv) Tồn tại $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{PSH}(\Omega)$ và hằng số $\lambda > 0$ sao cho với mọi $c < 0$ thì $\{z \in \Omega : \varphi(z) < c\} \Subset \Omega$ và $\varphi(z) - \lambda|z|^2$ là đa điều hoà trên Ω,

(v) Với mọi hàm $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ tồn tại $u \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sao cho $u_{|\partial\Omega} = f$,

(vi) Với mỗi $z_0 \in \partial\Omega$ tồn tại một cản đa điều hoà dưới địa phương tại z_0.

Kết quả sau đây của chúng tôi cho ta một điều kiện để nhận biết một miền bị chặn không phải là B-chính qui (xem [1]).

1.2.12 Mệnh đề. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Nếu tồn tại một dãy ánh xạ chỉnh hình $\varphi_j : \triangle \to \mathbb{C}^n$ thoả mãn $\varphi_j(\triangle) \subset \Omega$ và φ_j hội tụ đều địa phương trên $\triangle$ tới một ánh xạ khác hằng, chỉnh hình $\varphi : \triangle \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(\triangle) \subset \partial\Omega$ thì Ω không là miền B-chính qui.*

Tiếp theo chúng tôi trình bày về độ đo Jensen. Đây là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu bao trên các hàm đa điều hoà dưới thông qua các định lý đối ngẫu sẽ được đề cập đến ở phần cuối của mục này.

1.2.13 Định nghĩa. Cho K là một tập compact trong $\mathbb{C}^n$ và $z_0 \in K$. Ta gọi tập hợp tất cả các độ đo Borel chính qui, dương μ có giá trên K sao cho $\mu(K) = 1$ và với mọi hàm đa điều hoà dưới u trên một lân cận của K đều có $u(z_0) \leqslant \int_K u d\mu$ là *tập hợp các độ đo Jensen cùng với tâm* z_0 và ký hiệu là $\mathcal{J}_{z_0}(K)$.

1.2.14 Nhận xét. (i) Theo Định lý xấp xỉ đối với hàm đa điều hòa dưới ta thấy nếu $u(z_0) \leqslant \int_K u d\mu$ đúng với mọi hàm u đa điều hoà dưới *trơn* trên một lân cận của K thì $\mu \in \mathcal{J}_{z_0}(K)$.

(ii) Tập compact K trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui nếu và chỉ nếu $\mathcal{J}_z(K) = \{\delta_z\}$ với mọi $z \in K$, ở đây δ_z là độ đo Dirac tại z.

(iii) Trong trường hợp $K = \overline{\Omega}$, với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, Wikstrom đã đưa vào lớp $\mathcal{J}^c_{z_0}(K)$ các độ đo Jensen thỏa mãn điều kiện

$$u(z_0) \leqslant \int_K u d\mu, \ \forall u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{PSH}(\Omega).$$

Hiển nhiên $\mathcal{J}^c_{z_0}(K) \subset \mathcal{J}_{z_0}(K)$. Hơn nữa, bao hàm này là chặt .Tuy nhiên, nếu thêm giả thiết $\partial\Omega$ là $\mathcal{C}^1$ trơn thì $\mathcal{J}^c_{z_0}(K) = \mathcal{J}_{z_0}(K)$.

Cho K là tập compact trong $\mathbb{C}^n$, Poletsky gọi một độ đo Borel xác suất μ trên K là Jensen nếu $u(z_0) \leqslant \int_K u d\mu$ với mọi hàm đa điều hoà dưới u trên K, ở đây một hàm u được gọi là *đa điều hoà dưới* trên K nếu u nửa liên tục trên ở trên K và thoả mãn bất đẳng thức trung bình dưới trên tập hợp các điểm tụ của các dãy đĩa giải tích bị chặn đều *hội tụ* tới K.

Kết quả sau đây của chúng tôi chỉ ra rằng hai lớp các độ đo Jensen được đưa ra bởi Sibony và Poletsky thực chất là trùng nhau (xem [1], Bổ đề 4.1).

1.2.15 Bổ đề. *Cho K là tập compact trong $\mathbb{C}^n$ và u là một hàm đa điều hoà dưới (theo nghĩa của Poletsky) trên K. Khi đó với mọi $\mu \in \mathcal{J}_{z_0}(K)$ ta có $u(z_0) \leqslant \int_K u d\mu$.*

Định lý sau cho ta mối quan hệ giữa bao trên đa điều hoà dưới và các độ đo Jensen. Đây là kết quả mở rộng thực sự của chúng tôi từ định lý Edwards cổ điển (xem [2], Định lý 3.1).

1.2.17 Định lý. *Cho X là một tập con đóng của $\mathbb{C}^n$ và $\mathcal{A}$ là một nón lồi của $\mathcal{USC}_*(X)$. Nếu hàm nửa liên tục dưới $g : X \to (-\infty, +\infty]$ là giới hạn tăng của một dãy trong $\mathcal{C}_0(X)$ thì với mọi $z \in X$ ta có*

$$\sup\{u(z) : u \leqslant g, u \in \mathcal{A}\} = \inf\{\int_X g d\mu,\ \ \mu \in \mathcal{J}_z(\mathcal{A})\}$$

ở đây, $\mathcal{J}_z(\mathcal{A})$ là tập hợp các độ đo Borel chính qui, dương μ trên X sao cho $\mu(X) \leqslant 1$ và $u(z) \leqslant \int_X u d\mu,\ \ u \in \mathcal{A}$.

Dựa vào độ đo Jensen, chúng tôi đưa ra đặc trưng sau đây đối với miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ (xem [1], Bổ đề 2.8).

1.2.19 Mệnh đề. *Cho Ω là miền siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $z_0 \in \partial\Omega$. Khi đó $J_{z_0}(\partial\Omega) = \{\delta_{z_0}\}$ khi và chỉ khi tồn tại một cản đa điều hoà dưới tại z_0.*

1.3 Tính B-chính qui của miền Reinhardt và miền Hartogs trong $\mathbb{C}^n$

Kết quả chính thứ nhất của phần này là một đặc trưng của miền Reinhardt $B-$chính qui (xem [1], Mệnh đề 3.1).

1.3.2 Định lý. *Nếu Ω là một miền Reinhardt bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì Ω là miền B-chính qui khi và chỉ khi Ω là miền siêu lồi và $\partial\Omega$ không có cấu trúc giải tích.*

Kết quả chính thứ hai của chúng tôi trong mục này là một điều kiện đủ để một miền Hartogs bị chặn là B-chính qui (xem [1], Mệnh đề 3.5).

1.3.7 Định lý. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và φ là nửa liên tục trên, bị chặn ở trên Ω. Đặt $\Omega_\varphi = \{(z, w) : z \in \Omega, \log|w| + \varphi(z) < 0\}$. Khi đó,*

(a) Nếu Ω_φ là B-chính qui thì các khẳng định sau là đúng.

(i) Ω là B-chính qui.

(ii) $\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ và $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = \infty,\ \ \forall z_0 \in \partial\Omega$.

(iii) Với mọi ánh xạ chỉnh hình khác hằng $h : \triangle \to \Omega,\ \ \varphi \circ h$ không điều hoà trên $\triangle$.

(b) Ngược lại, nếu Ω và φ thoả mãn các điều kiện (i), (ii) và tập hợp $X = \{z \in \Omega : \varphi$ là không đa điều hoà dưới chặt tại $z\}$ là liên thông địa phương và B-chính qui địa phương thì Ω_φ là B-chính qui.

Kết quả dưới đây của chúng tôi cho một điều kiện đủ để tạo ảnh của một miền B-chính qui cũng là B-chính qui (xem [1], Mệnh đề 3.9).

1.3.11 Mệnh đề. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ chỉnh hình thoả mãn $f(\Omega)$ là tập mở. Giả sử Ω' và Ω'' là các miền con B-chính qui bị chặn tương ứng của Ω và $f(\Omega)$. Đặt $\Omega''' = f^{-1}(\Omega'') \cap \Omega'$ và*

$$S(f) = \{a \in \Omega : a \ \ \textit{không phải là điểm cô lập của } f^{-1}(f(a))\}.$$

Giả sử tồn tại một lân cận mở U của $S(f)$ và một tập compact B-chính qui K của $U \cap \partial\Omega'''$ thỏa mãn

(i) $S(f) \cap \overline{U} \cap \partial\Omega'''$ là B-chính qui,

(ii) $\partial\Omega'''$ là $\mathcal{C}^1$-trơn tại mọi điểm của tập hợp $(U \cap \partial\Omega''') \setminus (K \cup \partial\Omega')$.

Khi đó Ω''' là B-chính qui.

CHƯƠNG 2

ĐỘ ĐO JENSEN VÀ MIỀN B-CHÍNH QUI KHÔNG BỊ CHẶN TRONG $\mathbb{C}^N$

Dựa vào kết quả nghiên cứu của Tomassini cùng các cộng sự, kết hợp với việc nghiên cứu tính B-chính qui cho miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ trong chương 1, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu, mở rộng các vấn đề đối với miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

2.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản

2.1.1 Định nghĩa. (i) Miền không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *B-chính qui* nếu với mọi hàm bị chặn và liên tục tại các điểm biên (hữu hạn) của Ω thì tồn tại hàm bị chặn $u \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sao cho $\lim_{z \to z_0} u(z) = f(z_0)$ với mọi điểm biên hữu hạn z_0 của Ω.

(ii) Miền không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *B-chính qui địa phương* nếu với mọi $z_0 \in \partial\Omega$ tồn tại một lân cận bị chặn U của z_0 sao cho $U \cap \Omega$ là B-chính qui.

2.1.3 Định nghĩa. Miền không bị chặn Ω được gọi là *chính qui theo nghĩa thực* nếu với mọi $z \in \partial\Omega$, tồn tại lân cận mở bị chặn U của z sao cho $\Omega \cap U$ là chính qui theo Định nghĩa 1.2.2.

Kết quả sau của chúng tôi là một tính chất của miền không bị chặn, chính qui theo nghĩa thực (xem [2], Bổ đề 2.4).

2.1.4 Bổ đề. *Cho Ω là một miền không bị chặn, chính qui theo nghĩa thực trong $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ là một hàm bị chặn. Xác định $\tilde{f}$ trên $\overline{\Omega}$ bởi công thức*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{nếu } z \in \partial\Omega \\ M := \sup_{\xi \in \partial\Omega} f(\xi) & \text{nếu } z \in \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

và $\varphi(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{PSH}(\Omega), u^* \leqslant \tilde{f}$ trên $\Omega\}$, $z \in \Omega$. Khi đó, $\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ và $\varphi^* \leqslant \tilde{f}$ trên $\overline{\Omega}$.

Kết quả dưới đây cho chúng ta điều kiện để một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui địa phương (xem [2], Mệnh đề 2.5).

2.1.5 Mệnh đề. *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền không bị chặn. Khi đó, Ω là B-chính qui địa phương nếu các điều kiện sau thoả mãn*

(i) Với mỗi $z \in \partial\Omega$, tồn tại một hình cầu mở U tâm z sao cho $\Omega \cap U$ là siêu lồi,

(ii) Tồn tại một tập con đóng B-chính qui địa phương K của $\partial\Omega$ sao cho Ω là giả lồi chặt gần mọi điểm của $\partial\Omega \setminus K$.

Khái niệm sau đây của chúng tôi đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng các miền B-chính qui không bị chặn (xem [2]).

2.1.6 Định nghĩa. Một miền không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *kiểu bị chặn* nếu tồn tại một hàm giá trị thực $\varphi \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ sao cho $\varphi(z) < 0,\ \forall z \in \Omega$ và

$$\lim_{|z| \to \infty} \varphi(z) = -\infty.$$

2.2 Định lý đối ngẫu và miền B-chính qui không bị chặn

Kết quả sau của chúng tôi là một ứng dụng của Định lý 1.2.17 ở chương 1 cho trường hợp X là bao đóng của một miền *không* bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ (xem [2], Mệnh đề 3.3).

2.2.1 Mệnh đề. *Cho Ω là một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ là một hàm không âm bị chặn và $\mathcal{A} \subset \mathcal{USC}_*(\overline{\Omega})$ là một nón lồi. Nếu $\tilde{f}$ là một hàm bằng f trên $\partial\Omega$ và bằng M trên Ω, với M là một hằng số lớn hơn $\sup_{\partial\Omega} f$ thì với mọi $z \in \overline{\Omega}$ ta có*

$$\sup\{u(z) : u \leqslant \tilde{f}, u \in \mathcal{A}\} = \inf\{\int_{\overline{\Omega}} \tilde{f} d\mu : \mu \in \mathcal{J}_z(\mathcal{A})\}.$$

Bây giờ, ta xét trường hợp $X = \overline{\Omega}$, $\mathcal{A}$ là nón con, lồi của $\mathcal{USC}_*(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}_1$ là tập hợp tất cả các hàm thuộc $\mathcal{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ với giá compact, $\mathcal{A}_2$ là tập hợp các hàm thuộc $\mathcal{USC}_*(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{PSH}(\Omega)$. Với mỗi hàm bị chặn φ trên $\overline{\Omega}$ và $1 \leqslant i \leqslant 2$ ta xác định $\mathcal{S}_i\varphi(z) = \sup\{u(z) : u \leqslant \varphi, u \in \mathcal{A}_i\},\ \forall z \in \overline{\Omega}$.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là B-chính qui địa phương (xem [2], Mệnh đề 3.4).

2.2.2 Mệnh đề. *Cho Ω là một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(i) Với mỗi $z \in \partial\Omega$, tồn tại một lân cận U của z và một hàm $u \in \mathcal{PSH}^c(U \cap \Omega)$ thoả mãn $u(z) = 0$ và $u(\xi) < 0,\ \forall \xi \in (U \cap \Omega) \setminus \{z\}$,

(ii) Ω là chính qui theo nghĩa thực và $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\},\ \forall z \in \partial\Omega$, ở đây δ là độ đo Dirac tại z,

(iii) Ω là B-chính qui địa phương.

Mệnh đề sau đây của chúng tôi là một tương tự của mệnh đề trên đối với các miền B-chính qui địa phương không bị chặn (xem [2], Mệnh đề 3.5).

2.2.5 Mệnh đề. *Nếu Ω là một miền B-chính qui địa phương, không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ là bị chặn thì tồn tại $\varphi \in \mathcal{MPSH}(\Omega)$ có các tính chất sau*

(i) $\inf_{\partial\Omega} f \leqslant \varphi \leqslant \sup_{\partial\Omega} f$, $\lim\limits_{x \to z} \varphi(x) = f(z),\ z \in \partial\Omega$,

(ii) Tồn tại tập đa cực F của Ω sao cho φ liên tục trên $\Omega \setminus F$. Hơn nữa, nếu $f \in \mathcal{C}_0(\partial\Omega)$ thì tập đa cực F có thể xây dựng không phụ thuộc vào f.

Kết quả tiếp theo của chúng tôi trong trường hợp đặc biệt khi Ω là miền giả lồi chặt (không bị chặn) đã được chứng minh bởi Simioniuc và Tomassini (xem [2], Mệnh đề 3.6).

2.2.6 Mệnh đề. *Cho Ω là B-chính qui địa phương trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, với mọi hàm không âm $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ và với mọi tập con compact K của $\overline{\Omega}$ thoả mãn $K \cap \partial\Omega = \emptyset$ luôn tồn tại $u \in \mathcal{PSH}^c(\Omega)$ sao cho $u \geqslant 0, u = 0$ trên K và $u = f$ trên $\partial\Omega$.*

2.3 Độ đo Jensen và bài toán Dirichlet

Định lý sau cho của chúng tôi cho ta mối liên hệ giữa các độ đo Jensen và xấp xỉ *toàn cục* các hàm đa điều hoà dưới bị chặn (xem [2], Định lý 4.1).

2.3.1 Định lý. *Cho Ω là một miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \mathcal{J}_z(\mathcal{A}_2),\ \forall z \in \Omega$,

(ii) $\mathcal{S}_1\varphi = \mathcal{S}_2\varphi$ trên Ω với mọi $\varphi \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$,

(iii) Với mọi $u \in \mathcal{A}_2$, tồn tại một dãy bị chặn đều $\{v_j\}_{j\geqslant 1} \in \mathcal{A}_1$ sao cho $v_j \to u$ trên Ω và $\limsup\limits_{j\to\infty} v_j \leqslant u^*$ trên $\partial\Omega$.

2.3.3 Định nghĩa. Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Một ánh xạ liên tục $\Phi : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{C}^n$ được gọi là *họ các phép hợp luân* (isotopy) các ánh xạ song chỉnh hình xác định trên Ω nếu nó thỏa mãn các tính chất sau

(i) Với mỗi $t \in [0,1]$, $\Phi_t(.) = \Phi(t,.)$ là một đồng phôi giữa $\overline{\Omega}$ và $\overline{\Phi_t(\Omega)}$, hơn nữa Φ_t là song chỉnh hình từ Ω lên $\Phi_t(\Omega)$.

(ii) Với tất cả $z \in \Omega$ ta có $\Phi_t^{-1}(z)$ là giải tích thực theo t trên một lân cận của 0.

(iii) Φ_t^{-1} hội tụ đều tới $\Phi_0^{-1} = I_d$ trên các tập con compact của $\overline{\Omega}$ khi $t \to 0$.

2.3.4 Định nghĩa. Cho Φ là một họ các phép hợp luân của các ánh xạ song chỉnh hình trên Ω. Khi đó, tập hợp các điểm giới hạn của dãy các phần tử trong $\overline{\Omega} \cap \Phi_t(\partial\Omega)$ khi $t \to 0$ được gọi là *tập hợp điểm tụ* của Φ_t.

Trong định lý sau, chúng tôi đưa ra một lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà trên đó bài toán Dirichlet giải được (xem [2], Định lý 4.4).

2.3.5 Định lý. *Giả sử Ω là một miền kiểu bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $\{\Phi_t\}$ là một họ hợp luân các ánh xạ song chỉnh hình trên Ω sao cho với mọi z thuộc tập X gồm các điểm tụ biên của $\{\Phi_t\}$ ta có $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\}$. Khi đó các khẳng định sau là đúng*

(a) $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \mathcal{J}_z(\mathcal{A}_2),\ \forall z \in \Omega$;

(b) Nếu Ω là chính qui theo nghĩa thực thì với mọi hàm bị chặn $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, tồn tại hàm bị chặn $\Psi \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ thoả mãn

(i) $\Psi^* \leqslant f$ trên $\partial\Omega$,

(ii) $\lim\limits_{x \to z} \Psi(x) = f(z)$ với mọi $z \in \partial\Omega$ thoả mãn $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\}$.

(c) Nếu $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\},\ \forall z \in \partial\Omega$ thì tồn tại duy nhất một hàm bị chặn $\Psi \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ sao cho $\Psi = f$ trên $\partial\Omega$.

2.3.7 Hệ quả. *Một miền không bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là B-chính qui nếu hai điều kiện sau được thoả mãn*

(i) Ω là B-chính qui địa phương,

(ii) Ω là kiểu bị chặn.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một kết quả cho phép xét tính B-chính qui của một miền không bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ (xem [2], Mệnh đề 4.5).

2.3.8 Mệnh đề. *Giả sử* Ω *là miền không bị chặn trong* $\mathbb{C}^n$ *thoả mãn các điều kiện*

(i) Ω *là chính qui theo nghĩa thực,*

(ii) Tồn tại một họ các phép hợp luân $\{\Phi_t\}$ *của các hàm song chỉnh hình trên* Ω *sao cho với mọi điểm* z *thuộc tập các điểm tụ biên* X *của của họ* $\{\Phi_t\}$ *ta có* $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\}$*,*

(iii) $\overline{\Omega}$ *không chứa siêu phẳng phức tại vô cực.*

Khi đó, với mọi $f \in \mathcal{C}_0(\partial\Omega)$*,* $f \geqslant 0$ *tồn tại* $u \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ *thoả mãn (i), (ii) trong Định lý 2.3.5*

Sau đây là một số ví dụ về miền B-chính qui không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

2.4 Một số ví dụ về miền B-chính qui không bị chặn

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu một số miền B-chính qui không bị chặn đặc biệt trong $\mathbb{C}^n$. Mệnh đề sau của chúng tôi là một sự mở rộng kết quả của Simioniuc và Tomassini (xem [2], Mệnh đề 5.1).

2.4.2 Mệnh đề. *Giả sử* Ω *là một miền lồi không bị chặn trong* $\mathbb{C}^n$ *cùng với biên* $\mathcal{C}^1$*-trơn. Với mọi điểm biên hữu hạn* $z \in \partial\Omega$*, kí hiệu* $K_z = \mathcal{T}_z(\partial\Omega) \cap \partial\Omega$ *với* $\mathcal{T}_z$ *là không gian tiếp xúc thực tại* z*. Nếu với mọi* $z \in \partial\Omega$ *tồn tại một siêu phẳng* $\mathcal{L}_z \subset \mathcal{T}_z(\partial\Omega)$ *thoả mãn* $\mathcal{L}_z \cap \mathcal{K}_z = \{z\}$ *thì* Ω *là* B*-chính qui. Đặc biệt, mọi miền lồi chặt cùng với biên* $\mathcal{C}^2$*-trơn là* B*-chính qui.*

2.4.3 Mệnh đề. *Cho* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là kiểu bị chặn, chính qui theo nghĩa thực và tồn tại một tập con mở* $A \subset \partial\Omega$ *thoả mãn các điều kiện*

(i) $tA \cap \overline{\Omega} = \emptyset$*,* $\forall t > 0$*,*

(ii) $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\}$*,* $\forall z \in \partial\Omega \setminus A$*.*

Khi đó, với mọi hàm bị chặn $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$*, tồn tại* $\varphi \in \mathcal{MPSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\Omega)$ *sao cho* $\varphi^* \leqslant f$ *trên* $\partial\Omega$ *và* $\lim\limits_{x \to z} \varphi(x) = f(z)$ *với mọi* $z \in \partial\Omega$ *thoả mãn* $\mathcal{J}_z(\mathcal{A}_1) = \{\delta_z\}$*.*

Kết quả cuối cùng của mục này là một tính chất bất biến đối với một lớp các miền B-chính qui không bị chặn. Trước hết, chúng tôi đưa vào khái niệm sau.

2.4.5 Định nghĩa. Cho Ω, Ω' là các tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Toàn ánh chỉnh hình $f : \Omega \to \Omega'$được gọi là *có tính chất (P)* nếu hai điều kiện sau được thoả mãn.

(i) f thác triển liên tục tới $\partial\Omega$.

(ii) Tồn tại một tập con giải tích E của Ω' sao cho $f : \Omega \setminus f^{-1}(E) \to \Omega' \setminus E$ là một phủ chỉnh hình.

2.4.6 Mệnh đề. *Cho Ω, Ω' là các miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $f : \Omega \to \Omega'$ là ánh xạ chỉnh hình có tính chất (P). Nếu Ω là B-chính qui và $\overline{\Omega}$ không chứa các siêu phẳng phức tại vô cực thì Ω' là B-chính qui địa phương. Hơn nữa, nếu thêm điều kiện Ω là kiểu bị chặn thì Ω' là B-chính qui.*

CHƯƠNG 3

TOÁN TỬ MONGE-AMPERE ĐỐI VỚI HÀM DELTA ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI ĐỊA PHƯƠNG

Trong chương 1 và chương 2 chúng tôi đã nghiên cứu bài toán Dirichlet cho hàm đa điều hoà dưới thông qua việc nghiên cứu tính chất B-chính qui cho miền bị chặn và không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Toàn bộ chương 3 này dành cho việc nghiên cứu toán tử Monge-Ampere cho hàm delta đa điều hoà dưới địa phương. Các kết quả trong chương này đã được công bố trong [3]. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản.

3.1 Một số khái niệm và tính chất cơ bản của hàm delta đa điều hoà dưới địa phương

3.1.1 Định nghĩa. Cho Ω là tập mở trong $\mathbb{C}^n$. Một hàm u xác định trên Ω được gọi là *delta đa điều hoà dưới địa phương* nếu với mọi $z \in \Omega$, tồn tại lân cận U của z trong Ω và hai hàm đa điều hòa dưới bị chặn u_1, u_2 trên U thỏa mãn

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z),\ \ \forall z \in U.$$

Tập hợp tất cả các hàm delta đa điều hoà dưới địa phương xác định trên Ω được kí hiệu là $\delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$.

Mệnh đề sau của chúng tôi đưa ra một số tính chất cơ bản của lớp hàm này (xem [3], Mệnh đề 2.1).

3.1.3 Mệnh đề. *Nếu Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và $u, v \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$ thì các tính chất sau là đúng*

(i) $u * \rho_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\delta)$, $u * \rho_\delta \to u$ trên Ω khi $\delta \to 0$,

(ii) Nếu $u \leqslant v$ hầu khắp nơi trên Ω thì $u \leqslant v$ khắp nơi trên Ω,

(iii) Với mọi $z_0 \in \Omega$, tồn tại một lân cận mở U của z_0 và $\omega \in \mathcal{PSH}(U)$ sao cho $u + \omega$ và $v + \omega$ thuộc $\mathcal{L}^\infty(U) \cap \mathcal{PSH}(U)$,

(iv) $\max\{u, v\} \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$,

(v) u là tựa liên tục trên Ω, nghĩa là với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập mở $U \subset \Omega$ sao cho u là liên tục trên $\Omega \setminus U$ và $c(U, \Omega) < \epsilon$.

3.2 Toán tử Monge-Ampere đối với các hàm delta đa điều hoà dưới địa phương

Kết quả sau của chúng tôi cho phép xây dựng toán tử Monge-Ampère đối với hàm delta đa điều hoà dưới địa phương (xem [3], Mệnh đề 2.2).

3.2.1 Mệnh đề. *Cho m là một số nguyên thoả mãn $1 \leqslant m \leqslant n$, $u \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$ và $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$ là một phủ mở của Ω sao cho $u = v_{i,1} - v_{i,2}$ trên U_i với tất cả $i \geqslant 1$, ở đây $v_{i,1}, v_{i,2} \in \mathcal{L}^\infty(U_i) \cap \mathcal{PSH}(U_i)$. Trên mỗi tập mở U_i ta đặt*

$$(dd^c u)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k (dd^c v_{i,1})^k \wedge (dd^c v_{i,2})^{m-k}.$$

Khi đó, $(dd^c u)^m$ là một dòng đóng song bậc (m, m) trên Ω. Đặc biệt, độ đo Monge-Ampere phức $(dd^c u)^n$ là một độ đo Borel chính qui. Hơn nữa, định nghĩa của $(dd^c u)^m$ không phụ thuộc vào cách chọn phủ mở $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$.

Kết quả sau được suy ra từ Mệnh đề 3.2.1(xem [3], Mệnh đề 2.3).

3.2.2 Mệnh đề. *Nếu $u, v \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$ thì với mọi $1 \leqslant m \leqslant n$ ta có*

(i) $(dd^c u * \rho_\delta)^m \to (dd^c u)^m$ khi $\delta \to 0$,

(ii) $(dd^c(u + v))^m = \sum_{k=0}^m C_m^k (dd^c u)^k \wedge (dd^c v)^{m-k}$.

Định lý xấp xỉ sau là một dạng của định lý hội tụ đơn điệu Bedforf-Taylor cho các hàm delta đa điều hòa dưới địa phương (xem [3], Định lý 2.1).

3.2.3 Định lý. *Cho m là số nguyên dương thoả mãn $1 \leqslant m \leqslant n$ và dãy $\{u_j\}_{j\geqslant 1} \subset \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$ hội tụ theo điểm tới $u \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$. Khi đó, $(dd^c u_j)^m \xrightarrow{w} (dd^c u)^m$ nếu các điều kiện sau được thoả mãn*

(i) Với mọi $z_0 \in \Omega$, tồn tại một lân cận mở U của z_0 trong Ω và một dãy $\{\omega_j\}_{j\geqslant 1} \subset \mathcal{L}^\infty(U) \cap \mathcal{PSH}(U)$ sao cho $u_j + \omega_j \in \mathcal{L}^\infty(U) \cap \mathcal{PSH}(U)$ với tất cả $j \geqslant 1$,

(ii) Các dãy $\{u_j + \omega_j\}$ và $\{\omega_j\}$ hội tụ đơn điệu tới $u + \omega \in \mathcal{PSH}(U)$ và $\omega \in \mathcal{PSH}(U)$ tương ứng trên U

Tương tự như đối với hàm đa điều hòa dưới, chúng tôi đưa ra nguyên lý so sánh đối với một lớp con của $\delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$. Đây là định lý chính của chương này (xem [3], Định lý 2.3).

3.2.6 Định lý. *Giả sử* $u, v \in \delta^*\mathcal{PSH}_{loc}(\Omega)$ *thoả mãn các điều kiện*

(i) $\liminf_{z\to\partial\Omega}(u(z) - v(z)) \geqslant 0$,

(ii) Với mọi $z_0 \in \Omega$ *tồn tại một lân cận* U *của* z_0 *trong* Ω *và* $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{PSH}^c(U)$ *sao cho* $u = u_1 - u_2$ *và* $v = v_1 - v_2$ *trên* U,

(iii) Với mọi tập con mở $\Omega' \Subset \Omega$ *tồn tại* h *sao cho* $0 < h < dist(\partial\Omega', \partial\Omega)$ *và với tất cả* $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathbb{C}^n$ *thoả mãn* $|h_1| < h, |h_2| < h, \ldots, |h_n| < h$, *trên* Ω' *ta có*

$$dd^c u_{h_1} \wedge dd^c u_{h_2} \wedge \ldots \wedge dd^c u_{h_n} \geqslant 0,$$

$$dd^c v_{h_1} \wedge dd^c v_{h_2} \wedge \ldots \wedge dd^c v_{h_n} \geqslant 0,$$

$$dd^c (u+v)_{h_1} \wedge dd^c (u+v)_{h_2} \wedge \ldots \wedge dd^c (u+v)_{h_n} \geqslant 0,$$

$$dd^c (u+v)_{h_1} \wedge dd^c (u+v)_{h_2} \wedge \ldots \wedge dd^c (u+v)_{h_{n-1}} \geqslant 0,$$

trong đó, $u_t(z) = u(t - z)$.

Khi đó

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c u)^n \geqslant \int_{\{u<v\}} (dd^c v)^n.$$

KẾT LUẬN CỦA LUẬN ÁN

I. Các kết quả chủ yếu luận án đã thu được

1. Đưa ra điều kiện cần và đủ để một miền siêu lồi Reinhardt bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là miền B-chính qui, điều kiện đủ để một miền Hartogs bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là miền B-chính qui, điều kiện cần và đủ để tạo ảnh của một tập compact B-chính qui là B-chính qui và điều kiện cần và đủ để bảo toàn tính B-chính qui qua ánh xạ chỉnh hình.

2. Mở rộng định lý đối ngẫu cho miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Xây dựng được mối liên hệ giữa hai lớp độ đo Jensen và tính xấp xỉ toàn cục của hàm đa điều hoà dưới bị chặn.

3. Đưa ra đặc trưng của miền B-chính qui không bị chặn, miền B-chính qui địa phương. Tìm được hai lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà trên đó bài toán Dirichlet có lời giải. Đưa ra một số điều kiện đủ để một miền B-chính qui địa phương là miền B-chính qui. Mở rộng một số kết quả gần đây của Simioniuc, Tomassini đồng thời chỉ ra được một lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ mà tính B-chính qui bất biến qua ánh xạ chỉnh hình.

4. Xây dựng toán tử Monge-Ampère phức cho lớp hàm delta đa điều hoà dưới địa phương. Từ đó đưa ra định lý hội tụ đơn điệu và chứng minh được nguyên lý so sánh cho hàm delta đa điều hòa dưới địa phương.

II. Những vấn đề tiếp tục được nghiên cứu

Trong thời gian tới chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu những vấn đề sau:

1. Tiếp tục mở rộng các tính chất của miền B-chính qui không bị chặn từ miền B-chính qui bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

2. Xây dựng các lớp miền rộng hơn trong $\mathbb{C}^n$ mà trên đó bài toán Dirichlet đối với các hàm đa điều hoà dưới giải được.

3. Xây dựng và nghiên cứu toán tử Monge-Ampere cho lớp các hàm delta đa điều hoà dưới rộng hơn lớp hàm delta đa điều hoà dưới địa phương cũng như nghiên cứu lời giải bài toán Dirichlet cho các lớp hàm này.