BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

LÊ VĂN HIỆN

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ ĐIỀU KHIỂN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân

Mã số: 62. 46. 01. 05

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI – 2010

Công trình được hoàn thành tại: ***Trường Đại học Sư phạm Hà Nội***

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. Vũ Ngọc Phát, Viện Toán học

TS. Trịnh Tuấn Anh, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội

Phản biện 1: GS.TSKH. Đinh Nho Hào, Viện Toán học

Phản biện 2: GS.TS. Nguyễn Hữu Dư, Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐH Quốc Gia Hà Nội

Phản biện 3: TS. Trần Xuân Tiếp, Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội

Luận án được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp nhà nước họp tại ***Trường Đại học Sư phạm Hà Nội***

Vào hồi **8** giờ **30** phút ngày **21** tháng **8** năm **2010**

Có thể tìm hiểu luận án tại:

Thư viện Quốc gia, Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

DANH MỤC CÔNG TRÌNH SỬ DỤNG TRONG LUẬN ÁN

1. **Le Van Hien (2005)**, A note on the asymptotic stability of fuzzy differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal*, **57(7)**, pp. 904 – 911.

2. **Le V. Hien** and Vu N. Phat **(2009)**, Exponential stability and stabilization of a class of uncertain linear time-delay systems, *Journal of The Franklin Institute*, **346**, pp. 611– 625.

3. **L.V. Hien** and V.N. Phat **(2009)**, Delay feedback control in exponential stabilization of linear time-varying systems with input delay, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **26**, pp. 163 – 177.

4. Vu N. Phat and **Le V. Hien (2009)**, An application of Razumikhin theorem to exponential stability for linear non-autonomous systems with time-varying delay, *Applied Mathematics Letters*, **22**, pp. 1412– 1417.

5. **L.V. Hien**, Q.P. Ha and V.N. Phat **(2009)**, Stability and stabilization of switched linear dynamic systems with time delay and uncertainties, *Applied Mathematics and Computation*, **210**, pp. 223 – 231.

6. **Le V. Hien** and Vu N. Phat **(2009)**, Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3**, pp. 259 – 265.

7. **Le V. Hien** and Vu N. Phat (2010), Robust stabilization of linear polytopic control systems with mixed delays, *Acta Mathematica Vietnamica*, **35(3)**, pp. x–x (nhận đăng).

8. **Le Van Hien (2009)**, Exponential stability and stabilization of fuzzy time–varying delay systems, *International Journal of Systems Science* (nhận đăng).

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Lý thuyết ổn định là một bộ phận quan trọng của lý thuyết định tính các hệ phương trình vi phân, có nhiều ứng dụng trong thực tế kĩ thuật. Cùng với sự phát triển của lý thuyết điều khiển, đến những năm 60 của thế kỉ XX, người ta bắt đầu nghiên cứu tính ổn định của các hệ điều khiển (thường gọi là tính chất ổn định hoá). Từ đó đến nay, hai tính chất này đã trở thành một hướng nghiên cứu quan trọng trong lý thuyết điều khiển hệ thống, cả về lý thuyết lẫn ứng dụng, thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước như J. Hale, V. Kolmanovskii, T. Yoshizawa, V. Kharitonov, Vũ Tuấn, Nguyễn Thế Hoàn, Nguyễn Khoa Sơn, Phạm Kỳ Anh, Vũ Ngọc Phát, Nguyễn Đình Công, Nguyễn Hữu Dư,...

Hầu hết các quá trình trong thực tiễn kĩ thuật thường liên quan đến độ trễ thời gian nên lớp hệ có trễ đã thu hút được nhiều sự quan tâm nghiên cứu trong vài thập kỉ gần đây.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án này là nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển có trễ bằng phương pháp hàm Lyapunov.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa của các lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển sau:

Bằng phương pháp hàm Lyapunov, chúng tôi chứng minh được một số tiêu chuẩn ổn định cho lớp phương trình vi phân mờ dạng tổng quát $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Đồng thời chúng tôi thiết lập được các điều kiện dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính (LMIs) cho tính ổn định và ổn định hóa mũ của lớp hệ mờ Takagi-Sugeno có trễ biến thiên:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\xi(t)) \Big[A_i x(t) + D_i x(t - d(t)) + B_i u(t) \Big].$$

Bằng cách mở rộng hàm Lyapunov-Krasovskii kiểu Kharitonov, kết hợp với kĩ thuật *biến đổi mô hình* bằng công thức Newton-Leibniz, chúng tôi thiết lập được các điều kiện dạng LMIs cho tính ổn định và ổn định hóa mũ cho lớp hệ tuyến tính không chắc chắn, có trễ biến thiên:

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - d(t)) + [B + \Delta B(t)]u(t).$$

Điều kiện của chúng tôi không yêu cầu tính ổn định của ma trận A_0, đồng thời, sử dụng được ma trận A_1 của số hạng trễ vào đánh giá tính ổn định của hệ.

Kết hợp cách tiếp cận bằng định lí Razumikhin với kĩ thuật biến đổi mô hình bằng công thức Newton-Leibniz chúng tôi tìm được điều kiện ổn định mũ cho lớp hệ tuyến tính không dừng có trễ biến thiên dạng:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - h(t))$$

và bỏ được giả thiết hạn chế về tính khả vi của hàm trễ trong điều kiện mới của chúng tôi.

Bằng cách xây dựng hàm Lyapunov-Krasovskii mới và cách tiếp cận bằng phương trình vi phân Riccati ma trận, chúng tôi đưa ra tiêu chuẩn ổn định hóa mũ của lớp hệ điều khiển tuyến tính không dừng có trễ trên điều khiển:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_1(t)u(t-h).$$

Các kết quả này mở rộng tiêu chuẩn của Chen và Zheng (2006), Yue (2004), Yue và Han (2005), Zhang và các cộng sự (2007).

Sử dụng hàm Lyapunov-Krasovskii phụ thuộc tham số, chúng tôi thiết lập được các điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho tính ổn định hoá mũ của lớp hệ tuyến tính đa diện có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển dạng:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t)+A_1x(t-\tau)+A_2\int_{t-\tau}^{t} x(s)ds+B_0u(t)+B_1u(t-r)+B_2\int_{t-r}^{t} u(s)ds.$$

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa mũ cho lớp hệ chuyển mạch tuyến tính không chắc chắn trễ biến thiên:

$$\dot{x}(t) = [A_\sigma + \Delta A_\sigma(t)]x(t) + [D_\sigma + \Delta D_\sigma(t)]x(t-h(t)) + [B_\sigma + \Delta B_\sigma(t)]u(t)$$

và lớp hệ chuyển mạch tuyến tính có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển:

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t)+D_\sigma x(t-h)+E_\sigma\int_{t-r}^{t} x(s)ds+B_\sigma u(t)+C_\sigma u(t-h)+F_\sigma\int_{t-r}^{t} u(s)ds.$$

Dựa trên các hàm Lyapunov-Krasovskii cải tiến, chúng tôi đã thiết lập được một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận cho phép thiết kế quy tắc bật dạng hình học cho tính ổn định và ổn định hóa mũ các lớp hệ chuyển mạch nói trên.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov-Krasovskii. Bằng cách cải tiến và mở rộng cấu trúc hàm Lyapunov-Krasovskii, chúng tôi thiết lập được các điều kiện mới cho tính ổn định và ổn định hóa của các lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển nói trên.

5. Kết quả đạt được

Kết quả chính của luận án được trình bày ở các chương 2, 3, 4 và đã được công bố trong 8 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành trong và ngoài nước.

6. Cấu trúc của luận án

Luận án gồm 4 chương, phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình công bố của tác giả và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Một số kiến thức và kết quả bổ trợ.

Chương 2: Tính ổn định và ổn định hóa của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển mờ.

Chương 3: Tính ổn định và ổn định hóa mũ của các hệ phương trình vi phân tuyến tính có trễ.

Chương 4: Tính ổn định và ổn định hóa của các hệ chuyển mạch tuyến tính có trễ.

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC VÀ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

Chương này trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hoá của lớp hệ phương trình vi phân thường, hệ phương trình vi phân có trễ, phương trình vi phân mờ và một số bổ đề bổ trợ.

1.1. Bài toán ổn định và ổn định hoá

1.1.1. Bài toán ổn định

Xét hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

Giả thiết rằng với mỗi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, hệ (1.1) có nghiệm duy nhất đi qua điểm (t_0, x_0) xác định trên $[t_0, +\infty)$ và $f(t, 0) \equiv 0$.

Định nghĩa 1.1. Nghiệm *không* của hệ (1.1) được gọi là *ổn định mũ* nếu tồn tại các hằng số $\alpha > 0, N \geqslant 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t; t_0, x_0)$ của hệ (1.1) thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t; t_0, x_0)\| \leqslant N\|x_0\|e^{-\alpha(t-t_0)},\ \forall t \geqslant t_0.$$

Cặp (α, N) được gọi là các *chỉ số ổn định mũ Lyapunov*.

1.1.2. Phương pháp hàm Lyapunov

Định nghĩa 1.2. Hàm $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V(t, 0) = 0, \forall t \geqslant 0$, khả vi liên tục được gọi là hàm Lyapunov của hệ (1.1) nếu:

(i) Hàm $V(t, x)$ *xác định dương*, tức là, $V(t, x) \geqslant a(\|x\|), a \in \mathcal{K}, (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Đạo hàm, $\dot{V}(t, x(t)) := \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial x} f(t, x(t)) \leqslant 0$, với mọi nghiệm $x(t)$ của (1.1).

Nếu hàm $V(t, x)$ thoả mãn thêm các điều kiện:

(iii) $\exists b, c \in \mathcal{K} :\quad V(t, x) \leqslant b(\|x\|),\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$;

(iv) $\dot{V}(t, x(t)) \leqslant -c(\|x(t)\|)$, với mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1) thì $V(t, x)$ gọi là hàm Lyapunov chặt của hệ (1.1).

Định lí 1.1. *Nếu hệ* (1.1) *có hàm Lyapunov thì hệ là ổn định. Hơn nữa, nếu hàm Lyapunov là chặt thì hệ là ổn định tiệm cận đều.*

Định lí 1.2. *Giả sử hệ* (1.1) *có hàm Lyapunov thoả các điều kiện sau*

(i) $\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 :\ \lambda_1\|x\|^2 \leqslant V(t, x) \leqslant \lambda_2\|x\|^2,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,

(ii) $\exists \lambda_3 > 0 :\ \dot{V}(t, x(t)) \leqslant -2\lambda_3 V(t, x(t))$ *với mọi nghiệm* $x(t)$ *của hệ* (1.1).

Khi đó hệ (1.1) *là ổn định mũ với các chỉ số ổn định mũ là* λ_3 *và* $N = \sqrt{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}$.

1.1.3. Bài toán ổn định hoá

Xét một hệ thống điều khiển được mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big),\ t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.3. Hệ điều khiển (1.4) gọi là *ổn định hóa được* nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ phương trình vi phân (thường gọi là hệ đóng)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), g(x(t))), \quad t \geqslant 0, \tag{1.6}$$

là ổn định tiệm cận. Hàm $u(t) = g(x(t))$ gọi là *hàm điều khiển ngược*.

1.2. Bài toán ổn định, ổn định hoá hệ có trễ

1.2.1. Bài toán ổn định hệ có trễ

Xét hệ phương trình vi phân có trễ

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \geqslant t_0. \tag{1.8}$$

Cho $V : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục và $x(t_0, \phi)$ là nghiệm của (1.8) đi qua (t_0, ϕ). Đạo hàm của V dọc theo nghiệm của hệ (1.8) được xác định bởi

$$\dot{V}(t, x_t(t_0, \phi)) := \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[V(t+h, x_{t+h}(t_0,\phi)) - V(t, x_t(t_0,\phi))\Big].$$

Định nghĩa 1.4. Cho số $\alpha > 0$. Hệ (1.8) gọi là *α-ổn định mũ* nếu tồn tại hằng số $N \geqslant 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t, \phi)$ của (1.8) thỏa mãn điều kiện

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant N\|\phi\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Định lí 1.4. *(Lyapunov-Krasovskii Stability Theorem) Giả sử* $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ *biến mỗi tập* $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$ *($\mathcal{B}$ là tập bị chặn trong $\mathcal{C}$) thành tập bị chặn trong* $\mathbb{R}^n$ *và* $u, v, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *là các hàm liên tục, không giảm,* $u(0) = v(0) = 0$, $u(s) > 0, v(s) > 0$ *với mọi* $s > 0$. *Nếu tồn tại một hàm khả vi liên tục* $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ *sao cho*

$$u(\|\phi(0)\|) \leqslant V(t,\phi) \leqslant v(\|\phi\|)$$

và

$$\dot{V}(t,\phi) \leqslant -w(\|\phi(0)\|)$$

thì nghiệm không của (1.8) *là ổn định đều. Nếu* $w(s) > 0$ *với mọi* $s > 0$ *thì nghiệm* $x = 0$ *là ổn định tiệm cận đều. Hơn nữa, nếu* $\lim\limits_{s\to\infty} u(s) = \infty$ *thì nghiệm đó là ổn định tiệm cận toàn cục đều.*

Định lí 1.5. *(Razumikhin Theorem) Giả sử* $F : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ *biến mỗi tập* $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}$ *($\mathcal{B}$ là tập bị chặn trong $\mathcal{C}$) thành tập bị chặn trong* $\mathbb{R}^n$; $u, v, w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *là các hàm đơn điệu không giảm,* $u(0) = v(0) = 0$, $u(s) > 0, v(s) > 0$ *với mọi* $s > 0$ *và* $v(s)$ *tăng ngặt.*

Nếu tồn tại hàm khả vi liên tục $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sao cho*

(i) $u(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant v(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0$

(ii) $\dot{V}(t, x(t)) \leqslant -w(\|x(t)\|)$ *khi* $V(t+\theta, x(t+\theta)) \leqslant V(t, x(t)),\ \forall \theta \in [-h, 0]$ *và với mọi nghiệm* $x(t)$ *của hệ* (1.8) *thì nghiệm không của* (1.8) *là ổn định đều.*

Hơn nữa, nếu $w(s) > 0$ *khi* $s > 0$ *và tồn tại một hàm* $p(s)$ *liên tục, đơn điệu không giảm,* $p(s) > s$ *với mọi* $s > 0$ *sao cho*
(iii) $\dot{V}(t, x(t)) \leqslant -w(\|x(t)\|)$ *khi* $V(t+\theta, x(t+\theta)) \leqslant p(V(t, x(t))),\ \forall \theta \in [-h, 0]$ *thì nghiệm* $x = 0$ *của* (1.8) *là ổn định tiệm cận đều. Nếu giả thiết thêm,* $\lim\limits_{s \to \infty} u(s) = \infty$ *thì nghiệm đó là ổn định tiệm cận toàn cục đều.*

1.2.2. Bài toán ổn định hoá hệ điều khiển có trễ

Xét hệ điều khiển có trễ trên trạng thái

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, u(t)),\ t \geqslant 0, \quad x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0]. \tag{1.9}$$

Định nghĩa 1.5. Hệ điều khiển (1.9) gọi là *ổn định hóa được* nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ phương trình vi phân đóng (closed-loop system)

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t, g(x(t))), \tag{1.10}$$

là ổn định tiệm cận.

Định nghĩa 1.6. Cho số $\alpha > 0$. Hệ điều khiển (1.9) gọi là *α-ổn định hóa được dạng mũ* nếu tồn tại hàm $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sao cho hệ đóng (1.10) là α-ổn định, tức là, tồn tại số $N \geqslant 1$ sao cho mọi nghiệm $x(t_0, \phi)$ của hệ đóng (1.10) thỏa mãn đánh giá mũ

$$\|x(t_0, \phi)(t)\| \leqslant N\|\phi\| e^{-\alpha(t - t_0)},\ t \geqslant t_0.$$

1.3. Phương trình vi phân mờ và bài toán ổn định

1.3.1. Phương trình vi phân mờ

Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân mờ sau

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t \geqslant t_0, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.11}$$

trong đó, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^n$ và $t_0 \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathcal{E}^n$.

Định lí 1.6. *Giả sử* $f \in C[\mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n, \mathcal{E}^n]$ *thỏa các điều kiện sau*

(i) $\exists a, b \in \mathcal{K} :\ d[f(t, x), \widehat{o}] \leqslant a(t)\Big(1 + d[x, \widehat{o}]\Big),\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n,$

(ii) $d\Big[f(t, x), f(t, y)\Big] \leqslant b(t) d[x, y],\ \forall (t, x), (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n.$

Khi đó, với mọi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n$*, bài toán* (1.11) *có nghiệm duy nhất xác định trên* $[t_0, +\infty)$*. Hơn nữa, nghiệm* $x(t, t_0, x_0)$ *liên tục theo điều kiện đầu* (t_0, x_0)*.*

1.3.2. Bài toán ổn định cho phương trình vi phân mờ

Định nghĩa 1.11. Nghiệm $x = \widehat{o}$ của (1.11) được gọi là *ổn định mũ toàn cục* nếu tồn tại $\alpha > 0$ và một hàm $\beta(t, h) > 0$, đơn điệu tăng theo $h \geqslant 0$, sao cho mọi nghiệm $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ của (1.11) thỏa mãn điều kiện

$$d[x(t), \widehat{o}] \leqslant \beta(t_0, d[x_0, \widehat{o}]) e^{-\alpha(t - t_0)}, t \geqslant t_0.$$

Nếu $\beta = \beta(h)$ thì nghiệm $x = \widehat{o}$ gọi là *ổn định mũ toàn cục đều.*

1.4. Một số bổ đề bổ trợ

Bổ đề 1.1. *(Bất đẳng thức Cauchy ma trận) Giả sử $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó với mọi ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}, x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có*

$$2\langle Qy, x\rangle - \langle Sy, y\rangle \leqslant \langle QS^{-1}Q^{\mathsf{T}}x, x\rangle.$$

Bổ đề 1.2. *Giả sử $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó với mọi số $\nu > 0$ và với mọi hàm khả tích $w : [0, \nu] \to \mathbb{R}^n$, ta có*

$$\left[\int_0^{\nu} w(s)ds\right]^{\mathsf{T}} M \left[\int_0^{\nu} w(s)ds\right] \leqslant \nu \int_0^{\nu} w^{\mathsf{T}}(s)Mw(s)ds.$$

Bổ đề 1.3. *(Bổ đề Schur) Giả sử $X_{11} = X_{11}^{\mathsf{T}},\ X_{12},\ X_{22} = X_{22}^{\mathsf{T}}$ là các ma trận với số chiều thích hợp. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(i) $\quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^{\mathsf{T}} & -X_{22} \end{bmatrix} < 0$

(ii) $\quad X_{22} > 0,\ X_{11} + X_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^{\mathsf{T}} < 0.$

Bổ đề 1.4. *Giả sử A, E, F, H là các ma trận bất kì với số chiều thích hợp và F thỏa mãn điều kiện $F^{\mathsf{T}}F \leqslant I$. Khi đó, với mọi số dương ϵ và ma trận đối xứng xác định dương P, ta có*

(i) $\quad EFH + H^{\mathsf{T}}F^{\mathsf{T}}E^{\mathsf{T}} \leqslant \epsilon EE^{\mathsf{T}} + \epsilon^{-1}H^{\mathsf{T}}H.$

(ii) *Nếu $\epsilon I - HPH^{\mathsf{T}} > 0$ thì*

$(A+EFH)P(A+EFH)^{\mathsf{T}} \leqslant APA^{\mathsf{T}}+\epsilon EE^{\mathsf{T}}+APH^{\mathsf{T}}(\epsilon I-HPH^{\mathsf{T}})^{-1}HPA^{\mathsf{T}}.$

(iii) *Nếu $P - \epsilon EE^{\mathsf{T}} > 0$ thì*

$(A + EFH)^{\mathsf{T}}P^{-1}(A + EFE) \leqslant A^{\mathsf{T}}(P - \epsilon EE^{\mathsf{T}})^{-1}A + \epsilon^{-1}H^{\mathsf{T}}H.$

Bổ đề 1.6. *(Nguyên lí so sánh) Giả sử $g \in C[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}]$ và $r(t)$ là nghiệm cực đại của phương trình vi phân*

$$\dot{u}(t) = g(t, u(t)),\ u(t_0) = u_0 \tag{1.12}$$

xác định trên $[t_0, \infty)$. Giả sử $m \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ thỏa mãn

$$D^+m(t) \leqslant g(t, m(t)),\ t \geqslant t_0.$$

Khi đó, nếu $m(t_0) \leqslant u_0$ thì $m(t) \leqslant r(t),\ \forall t \geqslant t_0$.

Bổ đề 1.7. *(Integral Inequality) Giả sử $g \in C[\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}]$, $g(t, .)$ là hàm đơn điệu không giảm và $r(t)$ là nghiệm cực đại của phương trình (1.12) xác định trên $[t_0, \infty)$. Giả sử $m \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+]$ thỏa mãn*

$$m(t) \leqslant m(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, m(s))ds,\ t \geqslant t_0.$$

Khi đó, nếu $m(t_0) \leqslant u_0$ thì $m(t) \leqslant r(t),\ \forall t \geqslant t_0$.

CHƯƠNG 2

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA CỦA MỘT SỐ LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ ĐIỀU KHIỂN MỜ

Chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định cho lớp phương trình vi phân mờ dạng tổng quát (mục 2.1) và tính ổn định, ổn định hóa cho lớp hệ mờ dạng Takagi-Sugeno có trễ biến thiên (mục 2.2) dựa trên các bài báo [1, 8].

2.1. Tính ổn định nghiệm của phương trình vi phân mờ

Xét bài toán Cauchy cho phương trình vi phân mờ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0,\ t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Giả thiết rằng, với mỗi $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n$, bài toán (2.1) có nghiệm duy nhất xác định trên $[t_0, \infty)$ và $f(t, \widehat{o}) = \widehat{o}$.

Định lí 2.1. *Giả sử tồn tại $\rho > 0$ và hàm $V \in \mathcal{LC}_\rho$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $V(t, \widehat{o}) = 0, \exists a \in \mathcal{K} : V(t, x) \geqslant a(d[x, \widehat{o}]),\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$;

(ii) $\exists g \in C[\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}]$ *sao cho* $g(t, 0) = 0$ *và*

$$D^+V(t, x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\Big[V(t + h, x + hf(t, x)) - V(t, x)\Big] \leqslant g(t, V(t, x));$$

(iii) *Nghiệm $u = 0$ của phương trình vi phân thường*

$$\dot{u}(t) = g(t, u(t)),\ t_0 \in \mathbb{R}^+,\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

là ổn định.

Khi đó, nghiệm $x = \widehat{o}$ của phương trình (2.1) *là ổn định. Hơn nữa, nếu nghiệm $u = 0$ của* (2.2) *là ổn định tiệm cận thì nghiệm $x = \widehat{o}$ của* (2.1) *là ổn định tiệm cận.*

Hệ quả 2.1. *Giả sử tồn tại $\rho > 0$ và hàm $V \in \mathcal{LC}_\rho$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\exists a \in \mathcal{K} :\ V(t, x) \geqslant a(d[x, \widehat{o}]),\ V(t, \widehat{o}) = 0$;

(ii) $D^+V(t, x) \leqslant 0,\ \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$.

Khi đó nghiệm $x = \widehat{o}$ của phương trình (2.1) *là ổn định.*

Định lí 2.2. *Giả sử tồn tại $\rho > 0$ và hàm $V \in \mathcal{LC}_\rho$ thỏa các điều kiện sau:*

(i) $\exists a, b \in \mathcal{K} : a(d[x, \widehat{o}]) \leqslant V(t, x) \leqslant b(d[x, \widehat{o}]),\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$;

(ii) $\exists g \in C[\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}] :\ g(t, 0) = 0; D^+V(t, x) \leqslant g(t, V(t, x)), (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$.

Khi đó, nếu nghiệm $u = 0$ của phương trình (2.2) *là ổn định đều (ổn định tiệm cận đều) thì nghiệm $x = \widehat{o}$ của phương trình* (2.1) *là ổn định đều (ổn định tiệm cận đều).*

Hệ quả 2.2. *Với giả thiết* (i) *trong định lí 2.2 và giả sử tồn tại hàm $\lambda(t)$ liên tục, không âm, $\lambda_\infty := \int_0^\infty \lambda(t)dt < \infty$, sao cho $D^+V(t, x) \leqslant \lambda(t)d[x, \widehat{o}], (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$. Khi đó, nghiệm $x = \widehat{o}$ của* (2.1) *là ổn định đều.*

Định lí 2.3. *Với giả thiết* (i) *trong định lí 2.2 và giả sử tồn tại hàm $c(r)$ liên tục trên $[0, \rho), c(0) = 0,\ c(r) > 0, \forall r > 0$ sao cho $D^+V(t, x) \leqslant -c(d[x, \widehat{o}]), \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho)$. Khi đó, nghiệm $x = \widehat{o}$ của* (2.1) *ổn định tiệm cận đều.*

Định lí 2.4. *Giả sử tồn tại* $\rho > 0$ *sao cho hàm* $f(t,x)$ *bị chặn trên* $\mathbb{R}^+ \times S(\rho)$ *và tồn tại hàm* $V \in \mathcal{LC}_\rho$ *thỏa mãn các điều kiện*

(i) $a([x,\widehat{o}]) \leqslant V(t,x) \leqslant b(t, d[x,\widehat{o}]), (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho), a \in \mathcal{K}, b(t,.) \in \mathcal{K}$;

(ii) $\exists g \in C[\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R}], V^* \in C[\mathbb{R}^+ \times S(\rho), \mathbb{R}^+]$ *sao cho* $g(t,0) = 0, g(t,.)$ *là hàm đơn điệu không giảm,* $V^*(t,x) \geqslant c(d[x,\widehat{o}]), c \in \mathcal{K}$ *và*

$$D^+V(t,x) + V^*(t,x) \leqslant g(t, V(t,x)),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S(\rho);$$

(iii) *Nghiệm* $u = 0$ *của* (2.2) *ổn định.*

Khi đó nghiệm $x = \widehat{o}$ *của* (2.1) *ổn định tiệm cận.*

Định lí 2.5. *Giả sử tồn tại hàm* $V \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathcal{E}^n, \mathbb{R}^+)$ *Lipschitz địa phương thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $\lambda_1\Big(d[x,\widehat{o}]\Big)^p \leqslant V(t,x) \leqslant \lambda_2\Big(d[x,\widehat{o}]\Big)^q$;

(ii) $D^+V(t,x) \leqslant -\lambda_3\Big(d[x,\widehat{o}]\Big)^q + \lambda_4 e^{-\gamma t}$, *ở đó* $\lambda_i, i = 1,2,3,4, p, q, \gamma$ *là các số dương.*

Khi đó, nếu $\gamma > \dfrac{\lambda_3}{\lambda_2}$ *thì nghiệm* $x = \widehat{o}$ *của phương trình* (2.1) *là ổn định mũ toàn cục đều.*

2.2. Tính ổn định và ổn định hóa mũ của một lớp hệ mờ dạng Takagi-Sugeno có trễ biến thiên

Xét hệ phương trình vi phân điều khiển mờ dạng Takagi-Sugeno có trễ biến thiên

Luật R_i : *Nếu* ξ_1 là M_{i1} và ... và *Nếu* ξ_p là M_{ip} *Thì*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_i x(t) + D_i x(t - d(t)) + B_i u(t),\ t \in \mathbb{R}^+,\\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Phương trình giải mờ của hệ (2.7) được cho bởi

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\xi(t))\Big(A_i x(t) + D_i x(t - d(t)) + B_i u(t)\Big),\ t \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Để đơn giản, ta viết $\lambda_i(t)$ thay cho $\lambda_i(\xi(t))$ trong phần tiếp theo. Hệ mở của (2.8) (open system) được cho bởi hệ

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t)\Big(A_i x(t) + D_i x(t - d(t))\Big),\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Cho số $\alpha > 0$. Với P, Q là các ma trận đối xứng xác định dương, đặt

$$\mathcal{M}_i(P,Q) = \begin{bmatrix} A_i^\top P + PA_i + Q & PD_i \\ D_i^\top P & -(1-\mu)e^{-2\alpha h}Q \end{bmatrix}, \mathcal{N}(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định lí 2.6. *Cho số* $\alpha > 0$. *Hệ* (2.9) *là* α*-ổn định mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương* P, Q *thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau:*

$$\mathcal{M}_i(P,Q) + 2\alpha\mathcal{N}(P) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{H1}$$

Hơn nữa, mọi nghiệm $x(t,\phi)$ của (2.9) *đều thỏa mãn đánh giá mũ*

$$\|x(t,\phi)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

trong đó $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P), \alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h\lambda_{\max}(Q)$.

Xét hệ mờ T-S đa trễ (multiple delays)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t)\Big[A_i x(t) + \sum_{k=1}^{m} D_{ki} x(t - d_k(t))\Big],\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.12}$$

với $d_k(t)$ là các hàm trễ, $0 \leqslant d_k(t) \leqslant h_k,\ \dot{d}_k(t) \leqslant \mu_k < 1$ và $h = \max_{k=1,\dots,m} h_k$.

Cho số $\alpha > 0$. Với $P, Q_1, \dots, Q_m$ là các ma trận đối xứng xác định dương, đặt

$$X_i = A_i^{\mathsf{T}} P + PA_i + \sum_{k=1}^{m} Q_k, \quad Z_i = \begin{bmatrix} PD_{1i} & PD_{2i} & \dots & PD_{mi} \end{bmatrix},$$

$$S = \operatorname{diag}\Big((1-\mu_1)e^{-2\alpha h_1}Q_1, \dots, (1-\mu_m)e^{-2\alpha h_m}Q_m\Big),$$

$$\mathcal{M}_i(P, Q_1, \dots, Q_m) = \begin{bmatrix} X_i & Z_i \\ Z_i^{\mathsf{T}} & -S \end{bmatrix},\ \widetilde{\mathcal{N}}(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Định lí 2.7. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ* (2.12) *là α-ổn định mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, $Q_1, \dots, Q_m$ thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận sau:*

$$\mathcal{M}_i(P, Q_1, \dots, Q_m) + 2\alpha\widetilde{\mathcal{N}}(P) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{H2}$$

Hơn nữa, mọi nghiệm $x(t,\phi)$ của (2.12) *đều thỏa mãn đánh giá mũ*

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

trong đó $\tilde{\alpha}_1 = \lambda_{\min}(P), \tilde{\alpha}_2 = \lambda_{\max}(P) + \sum_{k=1}^{m} h_k\lambda_{\max}(Q_k)$.

Ví dụ 2.3. Xét hệ mờ T-S (2.9) với $r = 2$, hàm trễ $d(t) = h\sin^2\omega t$, các hàm liên thuộc và các ma trận trạng thái của luật R_1 và R_2 được cho bởi

$$\lambda_1(x(t)) = \frac{1}{1 + \exp(-2x_1(t))}, \quad \lambda_2(x(t)) = 1 - \lambda_1(x(t)) \text{ và}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0.1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Với $\alpha = 0.5$, bảng dưới đây cho độ trễ h với một số giá trị của $\mu = h\omega$.

μ	0	0.1	0.3	0.5	0.7
h	1.836	1.738	1.478	1.143	0.633

Bảng 2.1. Độ trễ h ứng với một số giá trị của μ

Khi $\mu = 0$ ($h = 1.836$), hệ là ổn định mũ với $\alpha = 0.5$ và khi đó bằng các tính toán theo định lí 2.6, nghiệm bất kì của hệ thỏa mãn

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant 3.66\|\phi\|e^{-0.5t},\ t \geqslant 0.$$

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán ổn định hóa đối với hệ 2.8. Hàm điều khiển ngược dựa trên các luật được biểu diễn dạng $u(t) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(t)K_i x(t)$. Khi đó, hệ đóng của hệ 2.8 được cho bởi

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Big[\Big(A_i + B_iK_j\Big)x(t) + D_ix(t-d(t))\Big],\ t \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Cho $\alpha > 0$. Với P, Q là các ma trận đối xứng xác định dương và Y_j là các ma trận thực, kí hiệu

$\Omega_{ij} = A_iP + PA_i^{\mathsf{T}} + Q + B_iY_j + Y_j^{\mathsf{T}}B_i^{\mathsf{T}}$,

$\mathcal{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{ij} & D_iP \\ PD_i^{\mathsf{T}} & -(1-\mu)e^{-2\alpha h}Q \end{bmatrix}, i, j = 1, 2, \ldots, r.$

Định lí 2.8. *Cho $\alpha > 0$. Hệ (2.8) là α-ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q và các ma trận $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau:*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mathcal{M}_{ii} + 2\alpha\mathcal{N}(P) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \\ &\text{(ii)} \quad \frac{\mathcal{M}_{ij} + \mathcal{M}_{ji}}{2} + 2\alpha\mathcal{N}(P) \leqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r,\ i < j. \end{aligned} \tag{H3}$$

Các ma trận đạt được, K_j, được cho bởi $K_j = Y_jP^{-1}, j = 1, \ldots, r$. Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng (2.14) thỏa mãn

$$\|x(t, \phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

trong đó, $\beta_1 = \dfrac{1}{\lambda_{\max}(P)},\ \beta_2 = \dfrac{1}{\lambda_{\min}(P)} + \dfrac{h\lambda_{\max}(Q)}{\Big[\lambda_{\min}(P)\Big]^2}.$

Ví dụ 2.4. Xét hệ (2.8) với $r = 2, h = 0.5,\ \lambda_1(x(t)) = \sin^2(x_2(t)),\ \lambda_2(x(t)) = \cos^2(x_2(t))$

$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$

$D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Với $\alpha = 1.5$, các điều kiện của định lí 2.8 thỏa với $Y_1 = Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 \end{bmatrix}$ và

$P = \begin{bmatrix} 0.0204 & -0.0444 \\ -0.0444 & 0.1479 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.0607 & 0.0415 \\ 0.0415 & 7.8736 \end{bmatrix}.$

Theo định lí 2.8, hệ đã cho là 1.5-ổn định hóa được dạng mũ. Các ma trận đạt được K_1, K_2 được cho bởi $K_1 = K_2 = \begin{bmatrix} -421.3326 & -194.1061 \end{bmatrix}$ và nghiệm bất kì của hệ đóng tương ứng thỏa mãn

$$\|x(t, \phi)\| \leqslant 122.9\|\phi\|e^{-1.5t},\ t \geqslant 0.$$

CHƯƠNG 3

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HOÁ MŨ CỦA CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ

Chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hoá mũ của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển tuyến tính có trễ dựa trên bài báo [2, 3, 4, 7].

3.1. Tiêu chuẩn ổn định và ổn định hoá mũ của các hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên

Xét lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên dạng

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - d(t)),\ t \geqslant 0, \\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{3.1}$$

ở đó $\Delta A_0(t) = E_0F_0(t)H_0, \Delta A_1(t) = E_1F_1(t)H_1$ là các đại lượng không chắc chắn, thỏa mãn $F_0^\top(t)F_0(t) \leqslant I, F_1^\top(t)F_1(t) \leqslant I$; hàm trễ $d(t)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leqslant d(t) \leqslant h,\ \dot{d}(t) \leqslant \mu < 1,\ \forall t \geqslant 0$.

Định lí 3.1. *Cho $\alpha > 0$. Hệ (3.1) là α-ổn định mũ bền vững nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, P_1, P_2, Q, R và các số dương $\alpha_0, \alpha_1, \epsilon_1, \epsilon_2, \rho_1, \rho_2$ thỏa các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau*

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Y^\top & -J_1 & 0 \\ Z^\top & 0 & -J_2 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{H4}$$

$$\begin{bmatrix} Q & PA_0^\top & PH_0^\top \\ A_0P & P_1 - \rho_1E_0E_0^\top & 0 \\ H_0P & 0 & \rho_1 I \end{bmatrix} > 0, \tag{H5}$$

$$\begin{bmatrix} R & PA_1^\top & PH_1^\top \\ A_1P & P_2 - \rho_2E_1E_1^\top & 0 \\ H_1P & 0 & \rho_2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{H6}$$

trong đó

$$\begin{aligned} X &= (A_0 + A_1)P + P(A_0 + A_1)^\top + \alpha_0E_0E_0^\top + \alpha_1E_1E_1^\top \\ &\quad + he^{2\alpha h}\Big[A_1(P_1 + P_2)A_1^\top + (\epsilon_1 + \epsilon_2)E_1E_1^\top\Big] + hQ + \tau he^{2\alpha h}R, \\ Y &= \begin{bmatrix} PH_0^\top & PH_1^\top \end{bmatrix},\ Z = h\begin{bmatrix} A_1P_1H_1^\top & A_1P_2H_1^\top \end{bmatrix}, \\ J_1 &= \operatorname{diag}\Big(\alpha_0I, \alpha_1I\Big),\ J_2 = he^{-2\alpha h}\operatorname{diag}\Big(\epsilon_1I - H_1P_1H_1^\top, \epsilon_2I - H_1P_2H_1^\top\Big). \end{aligned}$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ thỏa mãn

$$\|x(t, \phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ \forall t \geqslant 0,$$

với $\tau = (1 - \mu)^{-1}, \quad \Lambda_1 = [\lambda_{\max}(P)]^{-1},$

$$\Lambda_2 = [\lambda_{\min}(P)]^{-1} + \frac{1}{2}h^2(\lambda_{\max}(Q) + 3\tau e^{2\alpha h}\lambda_{\max}(R))[\lambda_{\min}(P)]^{-2}.$$

Nhận xét 3.1. *Cho $\Delta A_0(t) = 0$, $\Delta A_1(t) = 0$, chúng tôi nhận được các điều kiện ổn định mũ cho lớp hệ tuyến tính có trễ được nghiên cứu trong Liu (2003), Mondie và Kharitonov (2005), Kwon và Park (2006). Tuy nhiên, bằng kĩ thuật biến đổi mô hình dựa trên công thức Newton-Leibniz và việc xây dựng hàm Lyapunov-Krasovskii mới, các điều kiện của chúng tôi có ưu điểm hơn, đã đưa được các số hạng trễ vào đánh giá tính chất ổn định nghiệm của hệ. Chúng tôi minh họa tính ưu việt của các điều kiện trong định lí 3.1 thông qua một số ví dụ trong các bài báo của Liu (2003), Kharitonov (2005), Kwon (2006).*

Ví dụ 3.1. Xét hệ (3.1) với $d(t) = 0.2\cos^2(2.5t)$,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix},$$

$E_0 = E_1 = I,\ H_0 = H_1 = 0.2I.$

Với ví dụ này, tiêu chuẩn ổn định mũ của Liu (2003), Kharitonov (2005) không áp dụng được. Hơn nữa, dễ thấy rằng ma trận A_0 là ma trận không ổn định. Áp dụng định lí 3.1, hệ là ổn định mũ với $\alpha = 1$ và nghiệm bất kì của hệ thỏa mãn đánh giá $\|x(t,\phi)\| \leq 2.3\|\phi\|e^{-t},\ t \in \mathbb{R}^+$.

Ví dụ 3.2. Xét hệ tuyến tính với trễ hằng số (Liu 2003, Kwon và Park 2006)

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \tag{3.10}$$

ở đó, $A_0 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$.

Áp dụng định lí 3.1, so sánh độ trễ h và tốc độ mũ α được cho bởi các bảng sau:

α	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
Định lí 3.1	16.2	8.2	6.125	4.1	3.5
Park (2006)	5.525	2.649	1.765	1.345	1.191
Kharitonov (2005)	5.402	2.325	1.255	0.6001	0.2522
Liu (2003)	0.758	0.2809	0.1234	0.0482	0.0263

Bảng 3.1. So sánh độ trễ h với một số tốc độ mũ α

h	0.8	1.2	1.6	2.0
Kharitonov (2005)	0.7344	0.6145	0.5202	0.4481
Liu (2003)	0.9367	0.3400	0.0752	0.0102
Xu (2006)	0.9366	0.8991	0.6990	0.5494
Định lí 3.1	0.98023	0.98017	0.98003	0.97968

Bảng 3.2. So sánh tốc độ mũ α với một số độ trễ h

Mở rộng định lí 3.1 cho hệ tuyến tính không chắc chắn đa trễ

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + \sum_{k=1}^{m}[A_k + \Delta A_k(t)]x(t - d_k(t)), \tag{3.11}$$

Định lí 3.2. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ* (3.11) *là α-ổn định mũ bền vững nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, P_{ij}, Q_{ij} và các số dương $\epsilon_i, \alpha_j, \rho_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, m$ thỏa các bất đẳng thức ma trận tuyến tính sau*

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Y^{\mathsf{T}} & -J_1 & 0 \\ Z^{\mathsf{T}} & 0 & -J_2 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \tag{H7}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} & PA_j^{\mathsf{T}} & PH_j^{\mathsf{T}} \\ A_jP & P_{ij} - \rho_{ij}E_jE_j^{\mathsf{T}} & 0 \\ H_jP & 0 & \rho_{ij}I \end{bmatrix} > 0, \tag{H8}$$

ở đó, $S_i = \sum_{j=0}^{m} P_{ij}$, $X = \sum_{i=0}^{m} A_iP + P\sum_{i=0}^{m} A_i^{\mathsf{T}} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i E_iE_i^{\mathsf{T}}$

$$+ \sum_{i=1}^{m} h_i e^{2\alpha h_i}\Big[\epsilon_i E_iE_i^{\mathsf{T}} + A_iS_iA_i^{\mathsf{T}}\Big] + \sum_{i=1}^{m} h_i \sum_{j=0}^{m} \tau_j e^{2\alpha h_j} Q_{ij},$$

$$Y = [PH_0^{\mathsf{T}}\ PH_1^{\mathsf{T}}\ \ldots PH_m^{\mathsf{T}}], \quad Z = [h_1A_1S_1H_1^{\mathsf{T}}\ h_2A_2S_2H_2^{\mathsf{T}}\ \ldots h_mA_mS_mH_m^{\mathsf{T}}],$$

$$J_1 = \mathrm{diag}\Big(\alpha_0 I, \alpha_1 I, \ldots, \alpha_m I\Big),$$

$$J_2 = \mathrm{diag}\Big(h_1 e^{-2\alpha h_1}(\epsilon_1 I - H_1S_1H_1^{\mathsf{T}}), \ldots, h_m e^{-2\alpha h_m}(\epsilon_m I - H_mS_mH_m^{\mathsf{T}})\Big).$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của (3.11) *thỏa mãn đánh giá*

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\Lambda_3}{\Lambda_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t}, t \geqslant 0,$$

ở đó, $\tau_i = (1 - \mu_i)^{-1}$, $\Lambda_1 = [\lambda_{\max}(P)]^{-1}$,

$$\Lambda_3 = [\lambda_{\min}(P)]^{-1} + \Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m} \tau_j e^{2\alpha h_j}\lambda_{\max}(Q_{ij})(h_jh_i + \tfrac{1}{2}h_j^2)\Big\}[\lambda_{\min}(P)]^{-2}.$$

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán ổn định hóa cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên sau

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0(t)]x(t) + [A_1 + \Delta A_1(t)]x(t - d(t)) + [B + \Delta B(t)]u(t). \tag{3.12}$$

Định lí 3.3. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ* (3.12) *là α-ổn định hóa được dạng mũ bền vững nếu tồn tại ma trận khác không S, các ma trận đối xứng xác định dương P, P_1, P_2, Q, R và các số dương $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \rho_1, \rho_2$ thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận sau*

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{Y} & Z \\ \widetilde{Y}^{\mathsf{T}} & -\widetilde{J}_1 & 0 \\ Z^{\mathsf{T}} & 0 & -J_2 \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \tag*{(H9}$$

$$\begin{bmatrix} Q & PA_0^{\mathsf{T}} + S^{\mathsf{T}}B^{\mathsf{T}} & PH_0^{\mathsf{T}} & S^{\mathsf{T}}H_2^{\mathsf{T}} \\ A_0P + BS & P_1 - \rho_1\Big(E_0E_0^{\mathsf{T}} + E_2E_2^{\mathsf{T}}\Big) & 0 & 0 \\ H_0P & 0 & \rho_1 I & 0 \\ H_2S & 0 & 0 & \rho_1 I \end{bmatrix} > 0, \tag{H10}$$

$$\begin{bmatrix} R & PA_1^{\mathsf T} & PH_1^{\mathsf T} \\ A_1P & P_2-\rho_2E_1E_1^{\mathsf T} & 0 \\ H_1P & 0 & \rho_2 I \end{bmatrix} > 0, \tag{H11}$$

ở đó, $\widetilde{X} = (A_0+A_1)P + P(A_0+A_1)^{\mathsf T} + BS + S^{\mathsf T}B^{\mathsf T} + \alpha_0E_0E_0^{\mathsf T} + \alpha_1E_1E_1^{\mathsf T}$
$+\alpha_2E_2E_2^{\mathsf T} + he^{2\alpha h}\Big[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathsf T} + (\epsilon_1+\epsilon_2)E_1E_1^{\mathsf T}\Big] + hQ + \tau h e^{2\alpha h}R,$

$\widetilde{Y} = \begin{bmatrix} PH_0^{\mathsf T} & PH_1^{\mathsf T} & S^{\mathsf T}H_2^{\mathsf T}\end{bmatrix}$; $Z = h\begin{bmatrix} A_1P_1H_1^{\mathsf T} & A_1P_2H_1^{\mathsf T}\end{bmatrix}$,

$\widetilde{J}_1 = \mathrm{diag}\Big(\alpha_0 I, \alpha_1 I, \alpha_2 I\Big)$; $J_2 = he^{-2\alpha h}\mathrm{diag}\Big(\epsilon_1 I - H_1P_1H_1^{\mathsf T}, \epsilon_2 I - H_1P_2H_1^{\mathsf T}\Big)$.

Hàm điều khiển ngược được cho bởi $u(t) = SP^{-1}x(t),\ t\in\mathbb{R}^+$. *Hơn nữa, nghiệm bất kì của hệ đóng của* (3.12) *thỏa mãn*

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t\in\mathbb{R}^+.$$

Ví dụ 3.3. Xét hệ điều khiển (3.12) với hàm trễ $d(t) = 0.2\sin^2(4.5t)$ và các ma trận

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 4\end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2\end{bmatrix}, E_0 = E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$H_0 = H_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\ H_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0\end{bmatrix}.$$

Theo định lí 3.3, hệ đã cho là 0.5-ổn định hóa được dạng mũ với hàm điều khiển $u(t) = \begin{bmatrix} -15.6193 & -53.7814\end{bmatrix}x(t)$ và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant 211\|\phi\|e^{-0.5t},\ t\in\mathbb{R}^+.$$

3.2. Tiêu chuẩn ổn định mũ của hệ tuyến tính không dừng có trễ biến thiên: Cách tiếp cận bằng định lí Razumikhin

Xét lớp hệ tuyến tính không dừng với trễ biến thiên dạng

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h(t)), \quad t\geqslant 0,\\ x(t) &= \phi(t), \quad t\in[-h,0], \end{aligned} \tag{3.15}$$

ở đó $A(t), A_1(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ là các hàm ma trận liên tục và bị chặn trên $[0,+\infty)$; hàm trễ $h(t)$ là hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện $0\leqslant h(t)\leqslant h,\ t\geqslant 0$.

Cho các số dương λ,β,ϵ. Với $P\in BM^+[0,+\infty)$, kí hiệu

$P_\beta(t) = P(t) + \beta I,\ p = \sup\limits_{t\in R^+}\|P(t)\|,\ a = \sup\limits_{t\geqslant 0}\|A(t)A^{\mathsf T}(t)\|,$

$a_1 = \sup\limits_{t\geqslant 0}\|A_1(t)A_1^{\mathsf T}(t)\|,\ \mu(A) = \sup\limits_{t\geqslant 0}\mu(A(t)),\ \overline{A}(t) = A(t) + A_1(t),$

$\mathcal{A}(t) = \overline{A}(t) + 2h\beta A_1(t)A_1^{\mathsf T}(t) + 2h\lambda^{-1}I,\ \gamma = 2\beta\mu(\overline{A}) + 2h\beta^2a_1 + 2h\lambda^{-1} + \epsilon.$

Định lí 3.4. *Hệ* (3.15) *là ổn định mũ nếu tồn tại các số dương* β,λ,ϵ *sao cho* $\lambda^{-1}\beta\geqslant\max\{a,a_1\}$, *và tồn tại một hàm ma trận* $P\in BM^+[0,+\infty)$ *thỏa mãn* *phương trình vi phân Riccati sau*

$$\dot{P}(t) + \mathcal{A}^{\mathsf{T}}(t)P(t) + P(t)\mathcal{A}(t) + 2hP(t)A_1(t)A_1^{\mathsf{T}}(t)P(t) + \gamma I = 0. \tag{3.16}$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn đánh giá mũ

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{p+\beta}{\beta}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,\ \text{ở đó, } \alpha = \frac{\epsilon}{2(p+\beta)}.$$

Nhận xét 3.2. *Từ chứng minh của định lí 3.4 ta thấy, điều kiện RDE* (3.16) *có thể thay bởi điều kiện "lỏng" hơn: Tồn tại $P \in BM^{+}[0,+\infty)$ thỏa mãn bất đẳng thức ma trận*

$$\dot{P}(t) + \mathcal{A}^{\mathsf{T}}(t)P(t) + P(t)\mathcal{A}(t) + 2hP(t)A_1(t)A_1^{\mathsf{T}}(t)P(t) + \gamma I \leqslant 0.$$

Xét lớp hệ tuyến tính không chắc chắn với trễ biến thiên

$$\dot{x}(t) = [A + H\Delta(t)E]x(t) + [A_1 + H\Delta_1(t)E_1]x(t-h(t)),\ t \geqslant 0. \tag{3.20}$$

Hệ quả 3.1. *Hệ* (3.20) *ổn định mũ nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương X và các số dương $\beta, \lambda, \epsilon_i, i = 1,2,3,4$ sao cho $\lambda^{-1}\beta \geqslant \max\{a, a_1\}$, $\epsilon_4 I - E_1E_1^{\mathsf{T}} > 0$ và thỏa mãn bất đẳng thức ma trận sau*

$$\begin{bmatrix} \Omega & \overline{\gamma}X & XE^{\mathsf{T}} & XE_1^{\mathsf{T}} & 2\sqrt{h}A_1E_1^{\mathsf{T}} \\ \overline{\gamma}X & -\overline{\gamma}I & 0 & 0 & 0 \\ EX & 0 & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ E_1X & 0 & 0 & -\epsilon_3 I & 0 \\ 2\sqrt{h}E_1A_1^{\mathsf{T}} & 0 & 0 & 0 & -\big(\epsilon_4 I - E_1E_1^{\mathsf{T}}\big) \end{bmatrix} < 0, \tag{H12}$$

ở đó, $\overline{A} = A + A_1$; $\overline{\gamma} = 2\beta\mu(\overline{A}) + 4h\beta^2 a_1 + 2h\lambda^{-1} + \epsilon_1$;

$$\Omega = X\Big(\overline{A} + 2h\lambda^{-1}I\Big)^{\mathsf{T}} + \Big(\overline{A} + 2h\lambda^{-1}I\Big)X + \Big(\epsilon_2 + \epsilon_3 + 4h\epsilon_4\Big)HH^{\mathsf{T}} + 4hA_1A_1^{\mathsf{T}}.$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ (3.20) *thỏa mãn*

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant N\|\phi\|e^{-\sigma t},\ t \geqslant 0,$$

với $N = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\min}^{-1}(X) + \beta}{\beta}}$, $\sigma = \dfrac{\epsilon_1}{2\Big(\lambda_{\min}^{-1}(X) + \beta\Big)}$.

Ví dụ 3.4. Xét hệ (3.20) với $h(t) = 0.03\sin t$ nếu $t \in \mathcal{I} = \bigcup_{k\geq 0}[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $h(t) = 0$ nếu $t \in \mathbb{R}^{+} \setminus \mathcal{I}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ H = I,\ E = 0.2I,\ E_1 = 0.$$

Với $\lambda = 0.25$, $\beta = 4, \epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0.5, \epsilon_4 = 1.04$, các điều kiện trong hệ quả 3.1 đều được thỏa mãn và $X = \begin{bmatrix} 0.8355 & -0.0977 \\ -0.0977 & 0.9549 \end{bmatrix}$. Do đó, hệ (3.20) ổn định mũ và nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant 1.149\|\phi\|e^{-0.0095t},\ t \geqslant 0.$$

3.3. Tiêu chuẩn ổn định hóa mũ của các hệ tuyến tính không dừng có trễ trên điều khiển

Xét lớp hệ điều khiển tuyến tính không dừng có trễ trên điều khiển

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_1(t)u(t-h) \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ &x(0) = x_0, \;\; u(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{3.21}$$

ở đó, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B, B_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ là các hàm ma trận liên tục, bị chặn trên $[0, +\infty)$. Kí hiệu điều kiện đầu của hệ (3.21) bởi $\psi = (x_0, \phi)$ và $\|\psi\| = \big(\|x_0\|^2 + \|\phi\|^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

Cho số $\alpha > 0$. Liên kết với hệ (3.21), xét phương trình vi phân Riccati (RDE)

$$\dot{P}(t) + A^{\mathsf{T}}(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)R(t)P(t) + 2\alpha P(t) + Q = 0, \tag{3.22}$$

ở đó, $R(t) = \dfrac{1}{2}B(t)B^{\mathsf{T}}(t) - 2b_1^2\Big[I + h^2e^{2\alpha h}A(t)A^{\mathsf{T}}(t)\Big], \quad b_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|B_1(t)\|$.

Định lí 3.5. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (3.21) là α-ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại $P \in BM^+[0,\infty), Q \in M^+$ thỏa mãn RDE (3.22). Khi đó, hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ được cho bởi*

$$\begin{aligned} &u(t) = -\frac{1}{2}B^{\mathsf{T}}(t)P(t)\Big[x(t) + \int_{t-h}^{t} B_1(\theta+h)u(\theta)d\theta\Big], \; t \geqslant 0; \\ &u(t) = \phi(t), \; t \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Ứng dụng cho bài toán ổn định hóa bền vững của lớp hệ điều khiển tuyến tính không chắc chắn có trễ trên điều khiển

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) + [B_1 + \Delta B_1(t)]u(t-h). \tag{3.26}$$

Hệ quả 3.2. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (3.26) là α-ổn định hóa được dạng mũ bền vững nếu tồn tại ma trận Y, các ma trận đối xứng xác định dương P, Q và các số dương $\rho, \epsilon_i, i = 1, 2, 3$, sao cho $\rho I - E_1QE_1^{\mathsf{T}} > 0$ và thỏa mãn bất đẳng thức ma trận sau*

$$\begin{bmatrix} \Omega & hAQ & hAQE_1^{\mathsf{T}} & \Psi \\ hQA^{\mathsf{T}} & -e^{-2\alpha h}Q & 0 & 0 \\ hE_1QA^{\mathsf{T}} & 0 & -e^{-2\alpha h}(\rho I - E_1QE_1^{\mathsf{T}}) & 0 \\ \Psi^{\mathsf{T}} & 0 & 0 & -J \end{bmatrix} < 0, \tag{H13}$$

ở đó,

$\Omega = AP + PA^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + (B+B_1)Y + Y^{\mathsf{T}}(B+B_1)^{\mathsf{T}} + \varepsilon_1D_1D_1^{\mathsf{T}} + \varepsilon_2D_2D_2^{\mathsf{T}} + \varepsilon_3D_3D_3^{\mathsf{T}}$,

$\Psi = [Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}} \;\; he^{\alpha h}D_1 \;\; PE_1^{\mathsf{T}} \;\; Y^{\mathsf{T}}E_2^{\mathsf{T}} \;\; Y^{\mathsf{T}}E_3^{\mathsf{T}}], J = \mathrm{diag}\Big(Q, \rho I, \epsilon_1 I, \epsilon_2 I, \epsilon_3 I\Big)$.

Hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ được cho bởi

$$u(t) = YP^{-1}\Big[x(t) + \int_{t-h}^{t} B_1u(s)ds\Big].$$

Xét hệ điều khiển có trễ (Arstein 1982, Moon 2001, Yue 2004)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1u(t-h), \; t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.29}$$

Hệ quả 3.3. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (3.29) là α-ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại ma rận Y và các ma trận đối xứng xác định dương P, Q thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\begin{bmatrix} \Omega & hAQ & Y^{\mathsf{T}}B_1^{\mathsf{T}} \\ hQA^{\mathsf{T}} & -e^{-2\alpha h}Q & 0 \\ B_1Y & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0, \tag{H14}$$

ở đó, $\Omega = AP + PA^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + (B+B_1)Y + Y^{\mathsf{T}}(B+B_1)^{\mathsf{T}}$. *Hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ được cho bởi công thức* $u(t) = YP^{-1}\left[x(t) + \int_{t-h}^{t} B_1u(s)ds\right],\ t \in \mathbb{R}^+$.

Ví dụ 3.5. Xét hệ điều khiển tuyến tính không dừng có trễ trên điều khiển sau

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + B_1(t)u(t-1),\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.30}$$

với,

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) & 1 \\ -1 & a_1 \end{bmatrix};\ B(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix};\ B_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$a_0(t) = -\frac{2}{1+e^{-2t}};\ a_1 = \frac{\sqrt{1+4e^2}-1}{2e^2};\ b_0(t) = 2\sqrt{1 + \frac{4e^2}{(1+e^{-2t})^2}}.$$

Các điều kiện ổn định hóa của Chen (2006), Zhang (2007) không áp dụng được cho lớp các hệ không dừng này bởi vì các điều kiện của họ dẫn đến việc giải một hệ vô hạn các LMIs dạng $\Psi[A(t), B(t), B_1(t), P, Q, R] < 0,\ \forall t \geqslant 0$. Cho đến nay vẫn chưa có một tiêu chuẩn hữu hiệu nào giải các LMIs không dừng.

Ta có, $h = 1$ và $b_1 = 1$. Cho $\alpha = 1$, khi đó $P(t) = \begin{bmatrix} 1+e^{-2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in BM^+[0,\infty)$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M^+$ thỏa mãn RDE (3.22). Theo định lí 3.5, hệ (3.30) ổn định hóa được dạng mũ với tốc độ mũ $\alpha = 1$. Hàm điều khiển ngược cho bởi

$$u(t) = -\begin{bmatrix} b_0(t)(1+e^{-2t}) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} z(t),\ t \geqslant 0.$$

Ta có $p = 2$, $\lambda_{\min}(Q) = 2$, $\mu(A) = a_1$, $b = 2\sqrt{1+4e^2}$, $a^2 = 4, \lambda_0 = 0.0579$, $\lambda_1 = 4.3996$, $\lambda_2 = 97.3941$ và $N = 176.0696$. Theo định lí 3.5, nghiệm bất kì $x(t,\psi)$ của hệ đóng thỏa mãn $\|x(t,\psi)\| \leqslant 176.1\|\psi\|e^{-t},\ t \geqslant 0$.

Ví dụ 3.6. Xét hệ điều khiển có trễ (Chen 2006, Moon 2001, Yue và Han 2005)

$$\dot{x}(t) = (A + \gamma I)x(t) + B_1u(t-0.4), \tag{3.31}$$

với $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix};\quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Cho $\gamma = 2$ và $\alpha = 0.5$, hệ (3.31) là 0.5-ổn định hóa được dạng mũ. Hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ là $u(t) = \begin{bmatrix} -339.6500 & -0.0402 \end{bmatrix} z(t), t \geqslant 0$.

Với ví dụ này, giá trị lớn nhất $\gamma_{\max}$ của Chen (2006) là $\gamma_{\max} = 1.412$; Yue và Han (2005) là $\gamma_{\max} = 0.5998$ và hệ quả 3.2 là $\gamma_{\max} = 2.4998$.

Ví dụ 3.7. Xét hệ điều khiển tuyến tính có trễ trên điều khiển (Chen 2006, Moon 2001, Yue 2004, Yue và Han 2005):

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B_1 u(t - 0.2), \tag{3.32}$$

với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.25 & -3 \end{bmatrix}$; $\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}$, $|q| \leqslant \gamma$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bảng dưới đây cho giá trị $\gamma_{\max}$ hệ (3.32) ổn định hóa được

Phương pháp	Năm	Giá trị $\gamma_{\max}$
D. Yue	2004	3.0323
Yue và Han	2005	9.8615
Chen và Zheng	2006	10.8485
Moon	2001	11.6895
Hệ quả 3.2	2009	35.3187

3.4. Tiêu chuẩn ổn định hóa mũ của hệ tuyến tính đa diện có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển

Xét lớp hệ tuyến tính đa diện có trễ hỗn hợp trên trạng thái và điều khiển dạng

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + A_2 \int_{t-\tau}^{t} x(s)ds + B_0 u(t) + B_1 u(t-r) + B_2 \int_{t-r}^{t} u(s)ds, \tag{3.33}$$

ở đó, các ma trận A_k, B_k, $k = 0, 1, 2$, là các ma trận chưa biết nhưng thuộc tổ hợp lồi

$$\Omega = \left\{ \left[A_k(\xi), B_k(\xi)\right] = \sum_{i=1}^{p} \xi_i [A_{ki}, B_{ki}], k = 0, 1, 2, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \xi_i = 1 \right\},$$

trong đó A_{kj}, B_{kj} là các ma trận cho trước.

Cho số $\alpha > 0$. Với $P_i, Q_i, R_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận đối xứng xác định dương, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng nửa xác định dương và $Y_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, là các ma trận bất kì, đặt

$$P = \sum_{i=1}^{p} \xi_i P_i,\ Q = \sum_{i=1}^{p} \xi_i Q_i,\ R = \sum_{i=1}^{p} \xi_i R_i,\ Y = \sum_{i=1}^{p} \xi_i Y_i,$$

$$G_{ij} = B_{0i} Y_j + Y_j^{\mathsf{T}} B_{0i}^{\mathsf{T}} + e^{2\alpha r} \left(B_{1i} B_{1j}^{\mathsf{T}} + r B_{2i} B_{2j}^{\mathsf{T}} \right),$$

$$\Gamma_{ij} = A_{0i} P_j + P_j A_{0i}^{\mathsf{T}} + G_{ij} + Q_j + \tau R_j,\ H_{ij} = \begin{bmatrix} A_{1i} P_j & A_{2i} P_j & Y_j^{\mathsf{T}} \end{bmatrix},$$

$$D_j = \mathrm{diag}\Big(e^{-2\alpha\tau} Q_j, \quad \frac{1}{\tau} e^{-2\alpha\tau} R_j, \quad \mu I_m \Big), \quad \mu = (1 + r)^{-1},$$

$$\mathcal{M}_i(P_j, Q_j, R_j, Y_j) = \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & H_{ij} \\ H_{ij}^{\mathsf{T}} & -D_j \end{bmatrix}, \mathbb{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{N}(P_j) = \begin{bmatrix} P_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\min}(P) = \min_{i=1,2,\ldots,p} \{\lambda_{\min}(P_i)\},\ \lambda_{\max}(P) = \max_{i=1,2,\ldots,p} \{\lambda_{\max}(P_i)\},$$

$$\lambda_{\max}(Q) = \max_{i=1,2,\ldots,p}\{\lambda_{\max}(Q_i)\},\ \lambda_{\max}(R) = \max_{i=1,2,\ldots,p}\{\lambda_{\max}(R_i)\},$$
$$\lambda_{\max}(Y^\top Y) = \max_{i=1,2,\ldots,p}\{\lambda_{\max}(Y_i^\top Y_i)\},\ \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_{\max}(P)},$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} + \frac{\tau\lambda_{\max}(Q) + \frac{1}{2}\tau^2\lambda_{\max}(R) + \left(1+\frac{1}{2}r^2\right)\lambda_{\max}(Y^\top Y)}{[\lambda_{\min}(P)]^2}.$$

Định lí 3.6. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (3.33) là α-ổn định hóa được dạng mũ bền vững nếu tồn tại các ma trận $Y_i, i = 1, 2, \ldots, p$; tồn tại ma trận đối xứng nửa xác định dương S và các ma trận đối xứng xác định dương $P_i, Q_i, R_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$, thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận sau*

(i) $\mathcal{M}_i(P_i, Q_i, R_i, Y_i) + 2\alpha\mathcal{N}(P_i) < -\mathbb{S}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$ (H15)

(ii) $\mathcal{M}_i(P_j, Q_j, R_j, Y_j) + \mathcal{M}_j(P_i, Q_i, R_i, Y_i) + 2\alpha\mathcal{N}(P_i + P_j) < \frac{2}{p-1}\mathbb{S}$,(H16)
$i = 1, \ldots, p-1, j = i+1, \ldots, p.$

Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t, \phi)$ của hệ đóng tương ứng thỏa mãn

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0.$$

Ví dụ 3.8. Xét hệ điều khiển đa diện có trễ hỗn hợp trên trạng thái và điều khiển (3.33) với $p = 3, \tau = 1, r = 1$ và

$$A_{01} = \begin{bmatrix}-10 & 1\\ 0 & -10\end{bmatrix},\ A_{02} = \begin{bmatrix}-9 & 2\\ 0 & -15\end{bmatrix},\ A_{03} = \begin{bmatrix}-8 & 1\\ 0 & -12\end{bmatrix},\ A_{11} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$A_{12} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix},\ A_{13} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix},$$
$$A_{23} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B_{01} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ B_{02} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix},\ B_{03} = \begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix},\ B_{11} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix},$$
$$B_{13} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},\ B_{23} = \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}.$$

Theo tiêu chuẩn hạng Kalman, các cặp (A_{0i}, B_{0i}) và $(A_{0i} + A_{1i}, B_{0i})$ không điều khiển được. Tuy nhiên, với $\alpha = 0.5$, các điều kiện (H15), (H16) được nghiệm đúng và do đó hệ là 0.5-ổn định hóa được dạng mũ. Hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ được cho bởi công thức

$$\begin{aligned}u(t) &= YP^{-1}x(t) = (\xi_1Y_1 + \xi_2Y_2 + \xi_3Y_3) \times (\xi_1P_1 + \xi_2P_2 + \xi_3P_3)^{-1}x(t)\\ &= \frac{1}{p_1p_3 - p_2^2}\begin{bmatrix}z_1p_3 - z_2p_2 & z_2p_1 - z_1p_2\end{bmatrix}x(t),\end{aligned}$$

trong đó

$z_1 = -0.3847\xi_1 - 1.1660\xi_2 - 0.4223\xi_3,\ z_2 = -0.1106\xi_1 + 0.1127\xi_2 - 0.1062\xi_3,$
$p_1 = 13.4444\xi_1 + 4.7545\xi_2 + 9.0987\xi_3,\ p_2 = -0.1241\xi_1 + 1.3464\xi_2 - 0.0313\xi_3,$

$p_3 = 8.4191\xi_1 + 14.0144\xi_2 + 2.6604\xi_3$.

Hơn nữa, chỉ số ổn định mũ $N = \sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}} = 15.8316$ và mọi nghiệm $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn

$$\|x(t,\phi)\| \leqslant 15.8316\|\phi\|e^{-0.5t},\ t \geqslant 0.$$

CHƯƠNG 4

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HOÁ CỦA CÁC HỆ CHUYỂN MẠCH TUYẾN TÍNH CÓ TRỄ

Chương này trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa mũ của một số lớp hệ chuyển mạch tuyến tính có trễ dựa trên các bài báo [5, 6].

4.1. Tính ổn định và ổn định hoá mũ của các hệ chuyển mạch tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên

Xét lớp hệ chuyển mạch tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên dạng

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \big[A_\sigma + \Delta A_\sigma(t)\big]x(t) + \big[D_\sigma + \Delta D_\sigma(t)\big]x(t-h(t)),\ t \in \mathbb{R}^+,\\ &x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{aligned} \tag{4.1}$$

ở đó $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, N\}$ là quy tắc bật, các đại lượng không chắc chắn $\Delta A_i(t), \Delta D_i(t)$ thỏa mãn $\Delta A_i(t) = E_{0i}F_{0i}(t)H_{0i}$; $\Delta D_i(t) = E_{1i}F_{1i}(t)H_{1i}$, hàm trễ $h(t)$ thỏa mãn $0 \le h(t) \le h$, $\dot{h}(t) \le \mu < 1, t \geqslant 0$.

Định nghĩa 4.1. (Ulig 1979) Hệ ma trận $\{L_i\}, L_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 1, 2, \ldots, N$, gọi là *đầy đủ chặt* nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ sao cho $x^\top L_i x < 0$.

Cho các số $\alpha > 0, h, \mu$ và P là ma trận đối xứng xác định dương. Đặt

$\tau = (1-\mu)^{-1},\ \eta = \tau e^{2\alpha h} + 2\alpha,\ \alpha_1 = \lambda_{\min}(P)$,

$\alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h\Big[\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_{\max}(D_i^\top P D_i) + \tau \sum_{i=1}^{N} \lambda_{\max}(H_{1i}^\top H_{1i})\Big]$,

$S_i = E_{0i}E_{0i}^\top + e^{2\alpha h}E_{1i}E_{1i}^\top, Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} D_i^\top P D_i, R = \sum_{i=1}^{N} H_{1i}^\top H_{1i}$;

$\mathbf{L_i}(\mathbf{P}) = A_i^\top P + PA_i + H_{0i}^\top H_{0i} + PS_iP + Q + \tau R + \eta P.$

Định lí 4.1. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (4.1) là α-ổn định mũ nếu tồn tại ma trận P đối xứng xác định dương sao cho hệ ma trận $\{\mathbf{L_i}(\mathbf{P})\}, i = 1, 2, \ldots, N$ là hệ đầy đủ chặt. Hơn nữa, nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ thỏa mãn*

$$\|x(t,\phi)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0.$$

Ví dụ 4.1. Xét hệ chuyển mạch (4.1) với $N = 2$, hàm trễ $h(t) = 0.5\sin^2 t$ và

$$\left(A_1, D_1\right) = \left(\begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right), \left(A_2, D_2\right) = \left(\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\right),$$

$$E_{0i} = E_{1i} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, H_{0i} = H_{1i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Với $\alpha = 1$ thì $0.5\mathbf{L_1}(\mathbf{P}) + 0.5\mathbf{L_2}(\mathbf{P}) < -0.5I$, ở đó, $P = \begin{bmatrix} 3.3922 & -1.5840 \\ -1.5840 & 1.8170 \end{bmatrix}$.
Quy tắc bật được xác định bởi $\sigma(x(t)) = i$ khi $x(t) \in \widehat{\Omega}_i(P), i = 1, 2$. Khi đó mọi nghiệm $x(t, \phi)$ của hệ (4.1) thỏa mãn $\|x(t, \phi)\| \leq 5.2885\|\phi\|e^{-t},\ t \geqslant 0$.

Hệ quả 4.1. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ*

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [D + \Delta D(t)]x(t - h(t)),\ t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

là α-ổn định mũ nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương P thỏa mãn

$$A^\top P + PA + D^\top PD + PSP + \eta P + M < 0, \tag{H17}$$

ở đó,

$$S = E_0 E_0^\top + e^{2\alpha h} E_1 E_1^\top,\ M = H_0^\top H_0 + \tau H_1^\top H_1,\ \eta = 2\alpha + \tau e^{2\alpha h}.$$

Hơn nữa, nghiệm bất kì của hệ (4.4) thỏa mãn

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

với $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P)$, $\alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h\Big[\lambda_{\max}(D^\top PD) + \tau\lambda_{\max}(H_1^\top H_1)\Big]$.

Ví dụ 4.2. Xét hệ (4.4) với $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 4 & 0.1 \end{bmatrix}, \|\Delta A\| \leqslant 0.2$, $\|\Delta D\| \leqslant 0.2$ và $h = 0.5$. Áp dụng hệ quả 4.1, hệ ổn định mũ với $\alpha = 0.9539$ và mọi nghiệm của hệ đều thỏa mãn $\|x(t, \phi)\| \leqslant 5.9053\|\phi\|e^{-0.9539t},\ t \geqslant 0$. Với ví dụ này, tốc độ mũ giới hạn của Kharitonov (2005) là 0.476 và của Niculescu và cộng sự (1998) là 0.095.

Xét lớp hệ điều khiển chuyển mạch tuyến tính có trễ biến thiên

$$\dot{x}(t) = A_\sigma(t)x(t) + D_\sigma(t)x(t - h(t)) + B_\sigma(t)u(t),\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.6}$$

trong đó, $A_\sigma(t) = A_\sigma + \Delta A_\sigma(t),\ D_\sigma(t) = D_\sigma + \Delta D_\sigma(t),\ B_\sigma(t) = B_\sigma + \Delta B_\sigma(t)$.

Với P là ma trận đối xứng xác định dương, kí hiệu

$$Q = \sum_{i=1}^{N} D_i^\top PD_i,\ R = \sum_{i=1}^{N} H_{1i}^\top H_{1i},\ \widehat{S}_i = E_{0i}E_{0i}^\top + E_{2i}E_{2i}^\top + e^{2\alpha h}E_{1i}E_{1i}^\top;$$

$$\widehat{\mathbf{L}}_\mathbf{i}(\mathbf{P}) = A_i^\top P + PA_i - PB_iB_i^\top P + H_{0i}^\top H_{0i} + \frac{1}{4}PB_iH_{2i}^\top H_{2i}B_i^\top P$$
$$+ P\widehat{S}_iP + Q + \tau R + \eta P,\ i \in \mathcal{I}.$$

Định lí 4.2. *Cho số* $\alpha > 0$. *Hệ* (4.6) *là* α*-ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại ma trận đối xứng xác định dương* P *thỏa mãn một trong các điều kiện sau*

(i) *Hệ ma trận* $\{\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{P})\}$ *là hệ đầy đủ chặt;*

(ii) *Tồn tại các hằng số* $\xi_i \geq 0$ *với* $\sum_{i=1}^{N} \xi_i > 0$ *sao cho* $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \xi_i \widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{i}}(\mathbf{P}) < 0$(H18).

Hàm điều khiển ngược ổn định hóa hệ được cho bởi $u(t) = -\dfrac{1}{2} B_\sigma^\top P x(t),\ t \geqslant 0.$

4.2. Tính ổn định và ổn định hoá mũ của hệ chuyển mạch tuyến tính trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển

Xét lớp hệ chuyển mạch tuyến tính trễ hỗn hợp dạng

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + D_\sigma x(t-h) + E_\sigma \int_{t-r}^{t} x(s)ds,\ t \geqslant 0, \\ &x(t) = \phi(t),\ t \in [-\tau, 0],\ \tau = \max\{h, r\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Cho số $\alpha > 0$. Với P, Q, S, M là các ma trận đối xứng xác định dương, đặt

$$\mathbf{L}_{\mathbf{i}} = A_i^\top P + PA_i + 2\alpha P + Q + rS + M,$$
$$\Omega_i = \{x \in R^n : x^\top L_i x < 0\}, i \in \mathcal{I},$$
$$\widehat{\Omega}_1 = \Omega_1, \quad \widehat{\Omega}_i = \Omega_i \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} \widehat{\Omega}_j,\ i = 2, 3, \ldots, N.$$

Định lí 4.3. *Cho số* $\alpha > 0$. *Hệ* (4.7) *là* α*-ổn định mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương* P, Q, S, M *thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) *Hệ ma trận* $\{\mathbf{L}_{\mathbf{i}}\}$ *là hệ đầy đủ chặt;*

(ii) $$\begin{bmatrix} M & PD_i & PE_i \\ D_i^\top P & e^{-2\alpha h} Q & 0 \\ E_i^\top P & 0 & \frac{1}{r} e^{-2\alpha r} S \end{bmatrix} > 0,\ i \in \mathcal{I}. \tag{H19}$$

Quy tắc bật được xác định bởi $\sigma(x(t)) = i$ *khi* $x(t) \in \widehat{\Omega}_i$. *Hơn nữa, nghiệm bất kì* $x(t, \phi)$ *của* (4.7) *thỏa mãn*

$$\|x(t, \phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \|\phi\| e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0,$$

ở đó, $\alpha_1 = \lambda_{\min}(P),\ \alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + h\lambda_{\max}(Q) + \dfrac{1}{2} r^2 \lambda_{\max}(S).$

Xét hệ chuyển mạch tuyến tính có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + D_\sigma x(t-\tau) + E_\sigma \int_{t-\tau}^{t} x(s)ds + B_\sigma u(t) + C_\sigma u(t-r) + F_\sigma \int_{t-r}^{t} u(s)ds. \tag{4.10}$$

Cho $\alpha > 0$, P, Q, R, M là các ma trận đối xứng xác định dương, $Y_i, i \in \mathcal{I}$, là các ma trận bất kì, kí hiệu

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L_i} = A_iP + PA_i^{\mathsf{T}} + 2\alpha P + G_i + Q + \tau^2 R + M,\\
&G_i = B_iY_i + Y_i^{\mathsf{T}}B_i^{\mathsf{T}} + e^{2\alpha r}\left(C_iC_i^{\mathsf{T}} + F_iF_i^{\mathsf{T}}\right),\\
&\Omega_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^{\mathsf{T}}\mathbf{L_i}x < 0\right\},\ \mathcal{S}_i = \left\{Px : x \in \Omega_i\right\},\\
&\widehat{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1,\ \widehat{\mathcal{S}}_i = \mathcal{S}_i \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^{i-1}\widehat{\mathcal{S}}_j,\ i = 2,3,\ldots,N,\\
&U_i = \begin{bmatrix} D_iP & E_iP \end{bmatrix},\ H = \operatorname{diag}\left(e^{-2\alpha\tau}Q,\ e^{-2\alpha\tau}R\right);
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_1 = \lambda_{\max}^{-1}(P),\ \lambda_{\max}(Y) = \max_{i=1,2,\ldots,m}\lambda_{\max}(Y_i^{\mathsf{T}}Y_i),\ \mu = \sqrt{1+r^2},
$$

$$
\alpha_2 = \lambda_{\min}^{-1}(P) + \left[\tau\lambda_{\max}(Q) + \frac{1}{2}\tau^3\lambda_{\max}(R) + \left(r + \frac{1}{2}r^3\right)\lambda_{\max}(Y)\right]\lambda_{\min}^{-2}(P).
$$

Định lí 4.4. *Cho số $\alpha > 0$. Hệ (4.10) là α-ổn định hóa được dạng mũ nếu tồn tại các ma trận đối xứng xác định dương P, Q, R, M; tồn tại các ma trận $Y_i,\ i \in \mathcal{I}$ và các số $\tau_i \geqslant 0,\ i \in \mathcal{I}$ sao cho $\sum_{i=1}^N \tau_i > 0$ thỏa mãn các bất đẳng thức ma trận sau*

(i) $$\sum_{i=1}^{N}\tau_i\mathbf{L_i} < 0, \tag{H22}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} M & U_i & \mu Y_i^{\mathsf{T}} \\ U_i^{\mathsf{T}} & H & 0 \\ \mu Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0,\ i \in \mathcal{I}. \tag{H23}$$

Quy tắc bật được xác định bởi $\sigma(x(t)) = i$ khi $x(t) \in \widehat{\mathcal{S}}_i$ và hàm điều khiển ngược được xây dựng bởi công thức $u(t) = Y_\sigma P^{-1}x(t),\ t \geqslant 0$. Hơn nữa, nghiệm bất kì của hệ đóng của (4.10) thỏa mãn

$$
\|x(t,\phi)\| \leqslant \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\|\phi\|e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0.
$$

Chú ý 4.7. *Hệ chuyển mạch có trễ hỗn hợp được xét bởi Zhong và cộng sự (2008) hay hệ chuyển mạch có trễ trên điều khiển được xét bởi L. Lin (2007) là các trường hợp riêng của hệ (4.10) với $B_i = C_i = F_i = 0$ hay $D_i = E_i = 0, B_i = F_i = 0$.*

Ví dụ 4.6. Xét hệ (4.10) với $N = 2, \tau = 1, r = 1$ và

$$
\begin{aligned}
&\left(A_1, D_1, E_1, B_1, C_1, F_1\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),\\
&\left(A_2, D_2, E_2, B_2, C_2, F_2\right) = \left(\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Dễ thấy rằng, các ma trận $A_i, A_i + D_i, i = 1, 2$, đều không ổn định. Hơn nữa, theo tiêu chuẩn hạng Kalman, các cặp (A_i, B_i) và $(A_i + D_i, B_i), i = 1, 2$, không điều khiển được. Áp dụng định lí 4.4, hệ ổn định hóa được dạng mũ với tốc độ mũ $\alpha = 0.5$. Hàm điều khiển cho bởi $u(t) = K_ix(t), t \geqslant 0$, trong đó $K_1 = \begin{bmatrix} -0.1352 & -0.0701 \end{bmatrix}$, $K_2 = \begin{bmatrix} -0.0313 & -0.0905 \end{bmatrix}$. Nghiệm bất kì $x(t,\phi)$ của hệ đóng thỏa mãn đánh giá

$$
\|x(t,\phi)\| \leqslant 3.4549\|\phi\|e^{-0.5t}, \quad t \geqslant 0.
$$

KẾT LUẬN

Luận án này nghiên cứu tính ổn định của một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển. Bằng phương pháp hàm Lyapunov, dựa trên cách tiếp cận bằng các bất đẳng thức ma trận tuyến tính, các phương trình vi phân Riccati ma trận, chúng tôi đã chứng minh được một số tiêu chuẩn về ổn định, ổn định mũ và ổn định hóa được dạng mũ cho một số lớp hệ phương trình vi phân và điều khiển. Luận án đã đạt được các kết quả sau đây:

1. Chứng minh được một số tiêu chuẩn ổn định cho một lớp các phương trình vi phân mờ dạng tổng quát (Định lí 2.1-2.5). Thiết lập được một số điều kiện đủ dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính kiểu Kharitonov cho tính ổn định và ổn định hóa mũ của lớp hệ mờ Takagi-Sugeno có trễ (Định lí 2.6-2.8).

2. Đưa ra một số điều kiện đủ cho tính ổn định và ổn định hóa mũ của lớp hệ tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên (Định lí 3.1-3.3); hệ tuyến tính không dừng có trễ biến thiên, bỏ được giả thiết hạn chế về tính khả vi của hàm trễ (Định lí 3.4, Hệ quả 3.1).

3. Thiết lập được một số tiêu chuẩn ổn định hóa mũ cho lớp hệ điều khiển tuyến tính không dừng có trễ trên điều khiển (Định lí 3.5, Hệ quả 3.2) và lớp hệ điều khiển tuyến tính đa diện có trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển (Định lí 3.6). Cách tiếp cận của chúng tôi không sử dụng giả thiết về tính điều khiển được của hệ.

4. Thiết lập được các điều kiện đủ dạng các bất đẳng thức ma trận và cách xây dựng quy tắc bật dạng hình học cho tính ổn định và ổn định hóa mũ của lớp hệ chuyển mạch tuyến tính không chắc chắn có trễ biến thiên (Định lí 4.1-4.2) và trễ hỗn hợp trên cả trạng thái và điều khiển (Định lí 4.3-4.4).

5. Các kết quả đều được minh họa bằng các ví dụ giải số để khẳng định tính hiệu quả của các điều kiện của chúng tôi. Đồng thời, nhiều kết quả được so sánh với các tiêu chuẩn đã biết của các tác giả khác để minh họa cho tính ưu việt của các điều kiện mới của chúng tôi.