BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NINH VĂN THU

ĐA TẠP PHỨC VỚI NHÓM CÁC TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

CHUYÊN NGÀNH: Hình học và Tôpô
MÃ SỐ: 62.46.10.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2010

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Đỗ Đức Thái

Phản biện 1: GS.TSKH. Hà Huy Khoái, Viện Toán học

Phản biện 2: GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, Trường Đại học KHTN-ĐHQGHN

Phản biện 3: PGS.TS. Nguyễn Doãn Tuấn, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp Nhà nước họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi ...giờ..... ngày... tháng....năm 2010

Có thể tìm hiểu luận án tại: -Thư viện Quốc gia
-Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1]. Ninh Van Thu (2009), Characterization of linearly convex domains in C^n by their noncompact automorphism groups, *Vietnam Journal of Mathematics,* 37(1), pp. 67-79.

[2]. Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), Geometry of domains in C^n with noncompact automorphism groups, *Vietnam Journal of Mathematics,* 37(2&3), pp. 1-12.

[3]. Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), Characterization of domains in C^n by their noncompact automorphism groups, *Nagoya Mathematical Journal,* 196, pp. 135-160.

[4]. François Berteloot and Ninh Van Thu (2009), Existence of parabolic boundary points of certain domains in C^n, *http://arxiv.org/abs/0906.5125v1.*

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Giả sử M là một đa tạp phức. Nhóm tự đẳng cấu của M (ký hiệu bởi $Aut(M)$) là tập hợp các song chỉnh hình của M với phép toán hai ngôi là hợp thành của hai tự đẳng cấu. Tôpô trên $Aut(M)$ là tôpô hội tụ đều trên các tập con compact (tức là tôpô compact-mở).

Theo quan điểm của F. Klein, hình học của mỗi một lớp đối tượng là hình học của nhóm biến đổi. Chẳng hạn Hình học Euclid là hình học của nhóm các phép biến đổi đẳng cự, Hình học Affine là hình học của nhóm biến đổi Affine. Vì thế, hình học của các đa tạp phức cũng có thể xem như hình học của nhóm các tự đẳng cấu của đa tạp phức. Có hai bài toán cơ bản khi nghiên cứu hình học của các đa tạp phức:

Bài toán 1. Tìm các tính chất hình học bất biến qua nhóm các tự đẳng cấu.

Bài toán 2. Phân loại các đa tạp phức dựa trên nhóm các tự đẳng cấu của chúng.

Luận án tập trung nghiên cứu Bài toán 2. Cụ thể hơn, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa hình học của miền trong $\mathbb{C}^n$ và cấu trúc của nhóm tự đẳng cấu của nó, tức là xét xem miền được xác định bởi nhóm tự đẳng cấu đến mức độ nào.

Nếu Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì $Aut(\Omega)$ là một nhóm Lie thực. Một câu hỏi hoàn toàn tự nhiên được đặt ra là: nhóm Lie thực nào có thể xem như nhóm tự đẳng cấu của một đa tạp phức? Năm 2004 J. Winkelmann đã chỉ ra rằng cho trước một nhóm Lie thực compact K thì luôn luôn tồn tại miền bị chặn giả lồi chặt $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ sao cho $Aut(\Omega)$ đẳng cấu với K. Như vậy, bài toán phân loại các miền với nhóm tự đẳng cấu compact đã được giải quyết khá trọn vẹn.

Đối với trường hợp nhóm tự đẳng cấu không compact, các nhà toán học đã phân loại thành công các miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Còn đối với trường hợp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, bài toán phân loại mới chỉ được giải quyết trong một số trường hợp đặc biệt.

Tiếp tục luồng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài luận án là: *"Đa tạp phức với nhóm các tự đẳng cấu không compact"*.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là nghiên cứu bài toán phân loại các miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact. Ngoài ra, luận án còn nghiên cứu tính chất hình học địa phương của điểm biên tụ quỹ đạo.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày ở phần lý do chọn đề tài, đối tượng nghiên cứu của luận án là các đa tạp phức, cụ thể là các miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong luận án, tư tưởng chính xuyên suốt là xét xem với điều kiện nào của miền thì từ tính chất địa phương suy ra tính chất toàn cục. Điều đó cho phép chúng tôi phân loại được một số lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ nhờ tính không compact của nhóm tự đẳng cấu của nó.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kĩ thuật truyền thống của Hình học phức, Giải tích phức, đặc biệt là kĩ thuật scaling của S. Pinchuk, đồng thời chúng tôi cũng sáng tạo ra những kĩ thuật mới.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án gồm ba chương.

Chương I trình bày về đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact. Kết quả chính của chương này là chứng minh định lý sau đây.

Định lý 1.3.2. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng*

(a) *$\partial\Omega$ là nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$ và có kiểu $2m$ tại p_∞,*

(b) *Hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞,*

(c) *Tồn tại dãy $\{\varphi_p\}$ thuộc $Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ với điểm* *nào đó* $a \in \Omega$,

Khi đó, Ω *song chỉnh hình với miền có dạng sau*

$$M_H = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + H(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó H *là đa thức thuần nhất, bậc* $2m$ *và điều hòa dưới trên* $\mathbb{C}$.

Định lý trên là mở rộng các kết quả của F. Berteloot năm 1994 và kết quả của E. Bedford và S. Pinchuk năm 1991.

Chương II dành cho việc nghiên cứu bài toán phân loại các miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$. Kết quả chính của chương này là.

Định lý 2.3.2. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $p_\infty \in \partial\Omega$ *là một điểm biên tụ quỹ đạo của* Ω. *Khi đó, nếu* $\partial\Omega$ *nhẵn, lồi tuyến tính địa phương trong một lân cận của* p_∞ *và có kiểu hữu hạn* $2m$ *tại điểm* p_∞ *thì* Ω *song chỉnh hình với miền sau*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\},$$

trong đó P *là một đa thức thực đa điều hoà dưới không suy biến bậc nhỏ hơn hoặc bằng* $2m$.

Kết quả này là một mở rộng kết quả của H. Gaussier năm 1997 từ miền lồi lên miền lồi tuyến tính.

Chương III dành cho việc giới thiệu về giả thuyết Greene-Krantz và nghiên cứu tính chất hình học của điểm biên tụ quỹ đạo. Kết quả chính trong chương III là.

Định lý 3.1.1. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ *là một miền bị chặn giả lồi trong* $\mathbb{C}^2$ *và* $0 \in \partial\Omega$. *Giả sử rằng*

(1) $\partial\Omega$ *là nhẵn và thỏa mãn điều kiện Bell (R),*

(2) Tồn tại lân cận U *của điểm* $0 \in \partial\Omega$ *sao cho*

$$\Omega \cap U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \rho = \operatorname{Re} z_1 + P(z_2) + Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) < 0\},$$

trong đó P *và* Q *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) P *là nhẵn, điều hòa dưới, dương thực sự tại tất cả các điểm trong lân cận nào đó của gốc tọa độ trừ gốc tọa độ và hàm này triệt tiêu mọi cấp tại* $(0,0)$, *tức là:* $\lim\limits_{z_2 \to 0} \dfrac{P(z_2)}{|z_2|^N} = 0,\ \forall N \geq 0,$

(ii) $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *là hàm nhẵn và có thể viết dưới dạng* $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) = |z_2|^4 |\operatorname{Im} z_1|^2 R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *với hàm nhẵn* $R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *nào đó.*

Khi đó, $(0,0)$ *không phải là điểm tụ quỹ đạo parabolic.*

Định lý trên giải quyết giả thuyết Greene-Krantz cho một lớp miền đặc biệt trong $\mathbb{C}^2$.

6. Cấu trúc luận án

Bố cục của luận án ngoài phần mở đầu và phần phụ lục gồm ba chương được viết theo tư tưởng kế thừa. Ba chương của luận án được viết dựa trên bốn công trình trong đó hai công trình đã được đăng và một công trình đã được nhận đăng.

Chương I: Đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương II: Đặc trưng của miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương III: Giả thuyết Greene-Krantz.

Chương 1

Đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Mệnh đề sau là một mở rộng của định lý Greene-Krantz.

Mệnh đề 1.1.6. *Giả sử* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *và* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *là hai dãy các miền trong đa tạp phức* M *với* $\lim A_i = A_0$ *và* $\lim \Omega_i = \Omega_0$ *trong đó* A_0 *và* Ω_0 *là các miền trong* M. *Giả sử rằng* $\{f_i : A_i \to \Omega_i\}$ *là một dãy các song chỉnh hình. Giả sử thêm rằng dãy* $\{f_i : A_i \to M\}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* A_0 *đến ánh xạ chỉnh hình* $F : A_0 \to M$ *và dãy* $\{g_i := f_i^{-1} : \Omega_i \to M\}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* Ω_0 *đến ánh xạ chỉnh hình* $G : \Omega_0 \to M$. *Khi đó một trong hai khẳng định sau là đúng.*

(i) Dãy $\{f_i\}$ phân kỳ compact, hoặc

(ii) Tồn tại một dãy con $\{f_{i_j}\} \subset \{f_i\}$ sao cho dãy $\{f_{i_j}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của A_0 đến song chỉnh hình $F : A_0 \to \Omega_0$.

Mệnh đề 1.1.7. *Giả sử Ω là một miền trong đa tạp phức M chiều n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng $\partial\Omega$ giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm biên p_∞.*

(a) Giả sử D là một miền trong đa tạp phức Y chiều m. Khi đó dãy bất kì $\{\varphi_p\} \subset Hol(D, M)$ hội tụ đều trên các tập con compact của D đến p_∞ nếu và chỉ nếu $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ với a là một điểm nào đó trong D.

(b) Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại dãy $\{\varphi_p\} \subset Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ với $a \in \Omega$ thì miền Ω là taut.

Bổ đề 1.1.8. *Giả sử σ_∞ là hàm điều hòa dưới lớp C^2 trên $\mathbb{C}$ sao cho $\sigma_\infty(0) = 0$ và $\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\partial\sigma_\infty = +\infty$. Gọi $\{\sigma_k\}_k$ là một dãy các hàm điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ đến σ_∞. Giả sử ω là một miền tùy ý trong một đa tạp phức chiều m $(m \geq 1)$ và giả sử z_0 là một điểm cố định trong ω. Kí hiệu $\{M_k\}$ là dãy miền trong $\mathbb{C}^n$ xác định bởi*

$$M_k = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_1 + \sigma_k(z_2) + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\}.$$

Khi đó, dãy bất kì $\{h_k\} \subset Hol(\omega, M_k)$ thỏa mãn $\{h_k(z_0), k \geq 0\} \Subset M_\infty$

đều chứa một dãy con nào đó hội tụ đều trên các tập con compact của ω đến một phần tử của $Hol(\omega, M_\infty)$.

1.2 Ước lượng metric Kobayashi của miền trong $\mathbb{C}^n$

1.2.1 Hệ tọa độ đặc biệt và các đa đĩa

Trong mục này, chúng tôi sử dụng lập luận của D. Catlin trong để nghiên cứu hệ tọa độ đặc biệt và các đa đĩa. Gọi Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử rằng biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$. Giả sử rằng hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞. Chúng ta có thể giả sử rằng $p_\infty = 0$ và hạng của dạng Levi tại p_∞ chính xác bằng $n-2$. Gọi r là một hàm xác định biên nhẵn của miền Ω. Chú ý rằng do $\partial\Omega$ giả lồi tại p_∞ nên kiểu của biên $\partial\Omega$ tại p_∞ là một số nguyên chẵn $2m$ $(m \geq 1)$. Chúng ta có thể giả sử rằng $\dfrac{\partial r}{\partial z_n}(z) \neq 0$ với tất cả z trong một lân cận U của p_∞

Mệnh đề 1.2.1 (S. Cho)**.** *Với mỗi $z' \in U$ và số nguyên dương chẵn m, tồn tại song chỉnh hình $\Phi_{z'} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z = \Phi_{z'}^{-1}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ sao* *cho*

$$
\begin{aligned}
r(\Phi_{z'}^{-1}(\zeta)) = r(z') + \operatorname{Re}\zeta_n + &\sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{jk}(z')\zeta_1^j\bar{\zeta}_1^k \\
&+ \sum_{\alpha=2}^{n-1}|\zeta_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1}\operatorname{Re}((\sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} b_{jk}^\alpha(z')\zeta_1^j\bar{\zeta}_1^k)\zeta_\alpha) \\
&+ O(|\zeta_n||\zeta| + |\zeta^*|^2|\zeta| + |\zeta^*|^2|\zeta_1|^{m+1} + |\zeta_1|^{2m+1}),
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

trong đó $\zeta^* = (0, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1}, 0)$.

Bây giờ ta sẽ định nghĩa đa đĩa quanh z'. Trước hết, ta đặt

$$
\begin{aligned}
A_l(z') &= \max\{|a_{j,k}(z')|, j+k=l\}, (2\le l\le 2m),\\
B_{l'}(z') &= \max\{|b_{j,k}^\alpha(z')|, j+k=l', 2\le\alpha\le n-1\}, (2\le l'\le m).
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Với mỗi số $\delta > 0$, ta định nghĩa $\tau(z',\delta)$ như sau

$$
\tau(z',\delta) = \min\{\big(\delta/A_l(z')\big)^{1/l}, \big(\delta^{\frac{1}{2}}/B_{l'}(z')\big)^{1/l'}, 2\le l\le 2m, 2\le l'\le m\}. \tag{1.3}
$$

Đặt $\tau_1(z',\delta) = \tau(z',\delta) = \tau$, $\tau_2(z',\delta) = \cdots = \tau_{n-1}(z',\delta) = \delta^{1/2}$, $\tau_n(z',\delta) = \delta$. Bây giờ ta có thể định nghĩa đa đĩa $R(z',\delta) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_k| < \tau_k(z',\delta); k = 1, \cdots, n\}$ và giả đa đĩa $Q(z',\delta) = \{\Phi_{z'}^{-1}(\zeta) : \zeta \in R(z',\delta)\}$.

1.2.2 Co giãn các tọa độ

Thực hiện phép đổi tọa độ ta có thể tìm được các hàm tọa độ $z_1, \cdots, z_n$ xác định trên một lân cận nào đó U_0 của p_∞ sao cho

$$\begin{aligned}\rho(z) = \operatorname{Re} z_n &+ \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k} z_1^j \bar{z}_1^k \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}((b_{j,k}^\alpha z_1^j \bar{z}_1^k) z_\alpha) \\ &+ O(|z_n||z| + |z^*|^2|z| + |z^*|^2|z_1|^{m+1} + |z_1|^{2m+1}),\end{aligned}$$

trong đó $z^* = (0, z_2, \cdots, z_{n-1}, 0)$. Theo Mệnh đề 1.2.1, với mỗi điểm η trong một lân cận của gốc toạ độ, tồn tại duy nhất tự đẳng cấu Φ_η của $\mathbb{C}^n$ sao cho

$$\begin{aligned}\rho(\Phi_\eta^{-1}(w)) - \rho(\eta) = \operatorname{Re} w_n &+ \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}[(b_{j,k}^\alpha(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k) w_\alpha] \\ &+ O(|w_n||w| + |w^*|^2|w| + |w^*|^2|w_1|^{m+1} + |w_1|^{2m+1}),\end{aligned} \tag{1.4}$$

trong đó $w^* = (0, w_2, \cdots, w_{n-1}, 0)$.

Bây giờ, chúng ta định nghĩa phép co giãn không đẳng hướng Δ_η^ϵ bằng cách đặt

$$\Delta_\eta^\epsilon(w_1, \cdots, w_n) = \left(\frac{w_1}{\tau_1(\eta, \epsilon)}, \cdots, \frac{w_n}{\tau_n(\eta, \epsilon)}\right),$$

trong đó $\tau_1(\eta,\epsilon) = \tau(\eta,\epsilon)$, $\tau_k(\eta,\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$ $(2 \le k \le n-1)$ và $\tau_n(\eta,\epsilon) = \epsilon$. Đối với mỗi $\eta \in \partial\Omega$, ta đặt $\rho_\eta^\epsilon(w) = \epsilon^{-1}\rho\circ\Phi_\eta^{-1}\circ(\Delta_\eta^\epsilon)^{-1}(w)$. Thế thì

$$\begin{aligned}\rho_\eta^\epsilon(w) &= \operatorname{Re} w_n + \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta)\epsilon^{-1}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}(b_{j,k}^\alpha(\eta)\epsilon^{-1/2}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k w_\alpha) + O(\tau(\eta,\epsilon)).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Với mỗi $\eta \in U_0$, chúng tôi định nghĩa giả đa đĩa $Q(\eta,\epsilon)$ bởi

$$\begin{aligned}Q(\eta,\epsilon) &:= \Phi_\eta^{-1}(\Delta_\eta^\epsilon)^{-1}(D\times\cdots\times D)\\ &= \Phi_\eta^{-1}\{|w_k| < \tau_k(\eta,\epsilon),\ 1\le k\le n\},\end{aligned} \tag{1.6}$$

trong đó $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Cố định các lân cận W_0, V_0 của gốc tọa độ với $W_0 \subset V_0 \subset U_0$. Bây giờ ta định nghĩa giả metric

$$M(\eta,\overrightarrow{X}) := \sum_{k=1}^n \frac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_k|}{\tau_k(\eta,\epsilon(\eta))} = \|\Delta_\eta \circ \Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X}\|_1$$

trên U_0, trong đó chuẩn $\|\overrightarrow{X}\|_1 = \sum_{j=1}^n |X_j|$ với $\overrightarrow{X} = (X_1,\cdots,X_n) \in \mathbb{C}^n$. Bổ đề sau đóng vai trò quan trọng trong kĩ thuật scaling.

Bổ đề 1.2.3. *Tồn tại các hằng số $K \ge 1$, $0 < \alpha_1, A < 1$ sao cho với mỗi số nguyên $N \ge 1$ và mỗi hàm chỉnh hình $f : D_N \to U_0$ thỏa mãn $M(f(u), f'(u)) \le A$ trên D_N, ta có*

$$f(0) \in W_0 \text{ và } K^{N-1}\epsilon(f(0)) \le \alpha_1 \Rightarrow \overline{f(D_N)} \subset Q[f(0), K^N\epsilon(f(0))].$$

Với bất kì dãy $\{\eta_p\}_p$ các điểm trong $U_0 \cap \{\rho < 0\} =: U_0^-$ hội tụ đến gốc tọa, ta kết hợp với dãy các điểm $\eta'_p = (\eta_{1p}, \cdots, \eta_{np} + \epsilon_p)$, $\epsilon_p > 0$ sao cho η'_p thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Xét dãy các phép co giãn $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p}$. Thế thì $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(\eta_p) = (0, \cdots, 0, -1)$. Bởi vì (1.5), ta thấy rằng $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(\{\rho = 0\})$ được cho bởi phương trình sau

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w_n + P_{\eta'_p}(w_1, \bar{w}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \operatorname{Re}(Q^\alpha_{\eta'_p}(w_1, \bar{w}_1) w_\alpha) + \\ + O(\tau(\eta'_p, \epsilon_p)) = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

trong đó

$$\begin{aligned} P_{\eta'_p}(w_1, \bar{w}_1) &:= \sum_{\substack{j+k \le 2m \\ j,k > 0}} a_{j,k}(\eta'_p) \epsilon_p^{-1} \tau(\eta'_p, \epsilon_p)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k, \\ Q^\alpha_{\eta'_p}(w_1, \bar{w}_1) &:= \sum_{\substack{j+k \le m \\ j,k > 0}} b^\alpha_{j,k}(\eta'_p) \epsilon_p^{-1/2} \tau(\eta'_p, \epsilon_p)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k. \end{aligned}$$

Sau khi trích ra dãy con nếu cần, ta có $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(U_0^-)$ hội tụ đến miền sau

$$M_P := \{\hat{\rho} := \operatorname{Re} w_n + P(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\}, \tag{1.8}$$

trong đó $P(w_1, \bar{w}_1)$ là một đa thức bậc $\le 2m$ không chứa các hạng tử điều hòa.

Bổ đề 1.2.9. *Miền M_P là hyperbolic Brody.*

1.2.3 Ước lượng metric Kobayashi

Định lý 1.2.11. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi, kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm $p \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞. Khi đó, tồn tại một lân cận V của p_∞ sao cho:*

$$M(\eta, \overrightarrow{X}) \lesssim K_\Omega(\eta, \overrightarrow{X}) \lesssim M(\eta, \overrightarrow{X}) \text{ với mọi } \eta \in V \cap \Omega.$$

1.2.4 Tính chuẩn tắc của họ các ánh xạ chỉnh hình

Trong mục này, chúng tôi chứng minh định lý sau.

Định lý 1.2.12. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi, kiểu hữu hạn trong lân cận của điểm biên $(0, \cdots, 0) \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại $(0, \cdots, 0)$. Giả sử ω là một miền trong $\mathbb{C}^k$ và $\varphi_p : \omega \to \Omega$ là dãy các ánh xạ chỉnh hình sao cho $\eta_p := \varphi_p(a)$ hội tụ đến $(0, \cdots, 0)$ với điểm nào đó $a \in \omega$. Gọi $\{T_p\}_p$ là một dãy các tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^n$ kết hợp với dãy $(\eta_p)_p$ theo phương pháp co giãn tọa độ (nghĩa là: $T_p = \Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}$). Khi đó $\{T_p \circ \varphi_p\}_p$ là chuẩn tắc và giới hạn của nó là các ánh xạ chỉnh hình từ ω đến miền dạng sau*

$$M_P = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + P(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó $\tau(\partial\Omega, 0) = 2m$ và $P \in \mathcal{P}_{2m}$.

1.3 Sự tồn tại mô hình thuần nhất của miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact

Trong mục này, chúng tôi chứng minh kết quả chính thứ nhất của luận án.

Định lý 1.3.2. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $p_\infty \in \partial\Omega$ *là một điểm biên. Giả sử rằng*

(a) $\partial\Omega$ *là nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm* $p_\infty \in \partial\Omega$ *và có kiểu* $2m$ *tại* p_∞,

(b) Hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ *tại* p_∞,

(c) Tồn tại dãy $\{\varphi_p\}$ *thuộc* $Aut(\Omega)$ *sao cho* $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ *với điểm nào đó* $a \in \Omega$,

Khi đó, Ω *song chỉnh hình với miền có dạng sau*

$$M_H = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + H(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó H *là đa thức thuần nhất, bậc* $2m$ *và điều hòa dưới trên* $\mathbb{C}$.

Chương 2

Đặc trưng của miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact

2.1 Hệ toạ độ và đa đĩa của M. Conrad

Hệ toạ độ trong $\mathbb{C}^n$ được ký hiệu bởi $z = (z_1, z')$, trong đó $z_1 \in \mathbb{C}$ và $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm p_∞. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $p_\infty = 0$ và kiểu của $\partial\Omega$ tại gốc tọa độ bằng $2m$. Khi đó, tồn tại một lân cận U của $p_\infty = 0$ trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $\Omega \cap U$ là miền lồi tuyến tính và được xác định bởi một hàm nhẵn

$$r(z_1, z') = \operatorname{Re} z_1 + h(\operatorname{Im} z_1, z'),$$

trong đó h là một hàm nhẵn. Chúng ta có thể giả sử rằng tồn tại một số thực dương $\epsilon_0 > 0$ sao cho các tập mức $\{r(z) = \epsilon\}$ là lồi tuyến tính với mọi $-\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Với mỗi $\epsilon \in (0, \epsilon_0/2)$, $q \in \Omega \cap U$ thoả mãn $|r(q)| < \epsilon_0/2$ và mỗi véctơ đơn vị $v \in \mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{C}^n : |v| = 1\}$, ta đặt

$$\tau(q, v, \epsilon) := \sup\{\rho > 0 : r(q+\lambda v) - r(q) < \epsilon \text{ với } \lambda \in \mathbb{C} \text{ thoả mãn } |\lambda| < \rho\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\tau(q, v, \epsilon)$ là khoảng cách từ q đến $S_{q,\epsilon} := \{r(z) = r(q) + \epsilon\}$ dọc theo đường thẳng phức $\{q + \lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Đối với mỗi điểm $q \in \Omega \cap U$ và bất kỳ hằng số dương đủ nhỏ ϵ ta kết hợp với

(1) Một hệ toạ độ chỉnh hình $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ tâm tại q và bảo toàn tính trực giao,

(2) Các điểm $p_1, p_2, \cdots, p_n$ trên siêu mặt $S_{q,\epsilon}$ và

(3) Các số thực dương $\tau_1(q, \epsilon), \tau_2(q, \epsilon), \cdots, \tau_n(q, \epsilon)$.

Các ϵ-đa đĩa và các đồng dạng của nó theo hệ số $c > 0$ được định nghĩa bởi

$$cP_\epsilon(q) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - q_k| < c\tau_k(q, \epsilon) \ , \quad 1 \le k \le n\}.$$

2.2 Scaling miền $\Omega \cap U$

Trong mục này, chúng tôi sử dụng phương pháp của H. Gaussier để khẳng định rằng dãy miền scaling hội tụ. Giả sử rằng p_∞ là điểm tụ quỹ đạo của miền Ω trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, tồn tại dãy các tự đẳng cấu $\{h_\nu\}_{\nu \geq 0}$ của miền Ω và tồn tại điểm q trong Ω sao cho

$$\lim_{\nu \to \infty} h_\nu(q) = p_\infty.$$

Để thuận tiện chúng ta sử dụng các ký hiệu như sau.

$$q^\nu = h_\nu(q),$$
$$\epsilon_\nu = -r(q^\nu).$$

Tương ứng với q^ν và ϵ_ν, ta có hệ toạ độ mới $(z_1^\nu, \cdots, z_n^\nu)$, các số thực dương $\tau_{\nu,1}, \cdots, \tau_{\nu,n}$ và các điểm $p_1^\nu, \cdots, p_n^\nu$. Phép đổi toạ độ từ hệ toạ độ chính tắc sang hệ mới $(z_1^\nu, \cdots, z_n^\nu)$ là hợp thành của một phép tịnh tiến T_ν và một phép biến đổi Unita A_ν. Hơn nữa, $(A_\nu \circ T_\nu)^{-1}$ xác định trong một lân cận cố định của gốc toạ độ. Hàm xác định biên tương ứng r_ν được xác định bởi

$$r_\nu := r \circ (A_\nu \circ T_\nu)^{-1}.$$

Trong một lân cận cố định của $z = 0$ ta có thể viết

$$r_\nu(z) = -\epsilon_\nu + \mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{n} a_j^\nu z_j) + \sum_{2 \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2m} C_{\alpha\beta}^\nu {z'}^\alpha {z'}^\beta + O(|z|^{2m+1}),$$

trong đó $\alpha = (\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ và $z'^\alpha = z_2^{\alpha_2}. \cdots .z_n^{\alpha_n}$. Ở đây, đại lượng $O(|z|^{2m+1})$ xác định độc lập với ν.

Gọi $r \circ A$ là giới hạn của r_ν trên một lân cận compact cố định của p_∞ khi ν dần đến vô hạn, trong đó A là phép biến đổi Unita. Khi đó, với mọi $j \leq n$ và với mọi đa chỉ số α và β thoã mãn $2 \leq |\alpha|+|\beta| \leq 2m$ thì tồn tại các số a_j và $C_{\alpha\beta}$ sao cho

$$\lim_{\nu\to\infty} a_j^\nu = a_j \text{ và } \lim_{\nu\to\infty} C_{\alpha\beta}^\nu = C_{\alpha\beta}.$$

Bây giờ ta xét các phép co giãn toạ độ

$$\Lambda_\nu(z) := (\tau_{\nu,1}z_1, \cdots, \tau_{\nu,n}z_n)$$

và hàm số

$$\tilde{r}_\nu = \frac{1}{\epsilon_\nu} r_\nu \circ \Lambda_\nu.$$

Khi đó, hàm số $\tilde{r}_\nu$ có dạng sau

$$\tilde{r}_\nu(z) = -1 + \frac{1}{\epsilon_\nu} \operatorname{Re}\Big(\sum_{j=1}^n a_j^\nu \tau_{\nu,j} z_j\Big) + \frac{1}{\epsilon_\nu} \sum_{2\leq|\alpha|+|\beta|\leq 2m} C_{\alpha\beta}^\nu \tau_\nu^{\alpha+\beta} z'^\alpha z'^\beta + O((\epsilon_\nu)^{1/2m}|z|^{2m+1}),$$

trong đó $\tau_\nu^{\alpha+\beta} = \tau_{\nu,2}^{\alpha_2+\beta_2}. \cdots .\tau_{\nu,n}^{\alpha_n+\beta_n}$.

Mệnh đề 2.2.1. *Các hàm $\tilde{r}_\nu$ là nhẵn và đa điều hoà dưới. Hơn nữa, tồn tại một dãy con của dãy $\{\tilde{r}_\nu\}_\nu$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}^n$ đến một hàm đa điều hoà dưới nhẵn $\tilde{r}$ có dạng*

$$\tilde{r}(z) = -1 + \operatorname{Re}\Big(\sum_{j\geq 1} b_j z_j\Big) + P(z'),$$

trong đó P là đa thức đa điều hoà dưới bậc nhỏ hơn hoặc bằng $2m$.

Gọi Ω_ν là ảnh của miền $\Omega \cap U$ qua phép đổi biến $\Lambda_\nu^{-1} \circ A_\nu \circ T_\nu$. Mệnh đề 2.2.1 suy ra rằng dãy miền $\{\Omega_\nu\}$ hội tụ đến miền $\tilde{D} = \{\tilde{r}(z) < 0\}$ theo nghĩa hội tụ chuẩn tắc theo nghĩa Carathéodory.

2.3 Tính chuẩn tắc của họ ánh xạ scaling

Xét dãy ánh xạ f_ν từ $h_\nu^{-1}(\Omega \cap U)$ đến Ω_ν được cho bởi

$$f_\nu = \Lambda_\nu^{-1} \circ A_\nu \circ T_\nu \circ h_\nu.$$

Nhắc lại rằng $\lim_{\nu\to\infty} h_\nu^{-1}(\Omega \cap U) = \Omega$ và trong mục trước ta đã chỉ ra rằng $\lim_{\nu\to\infty} \Omega_\nu = \tilde{D}$.

Bổ đề 2.3.1. *Họ ánh xạ $\{f_\nu\}_\nu$ là chuẩn tắc.*

Định lý sau đặc trưng cho miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$. Đây là kết quả chính thứ hai của luận án.

Định lý 2.3.2. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên tụ quỹ đạo của Ω. Khi đó, nếu $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính địa phương trong một lân cận của p_∞ và có kiểu hữu hạn $2m$ tại điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\},$$

trong đó P là một đa thức thực đa điều hoà dưới không suy biến bậc nhỏ hơn hoặc bằng $2m$.

Chương 3

Giả thuyết Greene-Krantz

3.1 Một số kết quả xung quanh giả thuyết Greene-Krantz

Năm 1993, R. Greene và S. G. Krantz đưa ra giả thuyết sau.

Giả thuyết Greene-Krantz. *Nếu nhóm tự đẳng cấu $Aut(\Omega)$ của miền bị chặn, nhẵn và giả lồi $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ không compact thì điểm tụ quỹ đạo bất kì đều có kiểu hữu hạn.*

Mục đích của chương này là trình bày chứng minh định lý sau.

Định lý 3.1.1. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ là một miền bị chặn giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ và $0 \in \partial\Omega$. Giả sử rằng*

(1) $\partial\Omega$ là nhẵn và thỏa mãn điều kiện Bell (R),

(2) Tồn tại lân cận U của điểm $0 \in \partial\Omega$ sao cho

$$\Omega \cap U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \rho = \operatorname{Re} z_1 + P(z_2) + Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) < 0\},$$

trong đó P và Q thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) P là nhẵn, điều hòa dưới, dương thực sự tại tất cả các điểm trong lân cận nào đó của gốc tọa độ trừ gốc tọa độ và hàm này triệt tiêu mọi cấp tại $(0,0)$, tức là: $\lim\limits_{z_2 \to 0} \dfrac{P(z_2)}{|z_2|^N} = 0,\ \forall N \geq 0,$

(ii) $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ là hàm nhẵn và có thể viết dưới dạng $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) = |z_2|^4 |\operatorname{Im} z_1|^2 R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ với hàm nhẵn $R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ nào đó.

Khi đó, $(0,0)$ không phải là điểm tụ quỹ đạo parabolic.

3.2 Sự tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic

Giả Ω là một miền thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.1. Gọi $F = (f, g) \in Aut(\Omega)$ là tự đẳng cấu sao cho $F(0,0) = (0,0)$. Do điều kiện Bell (R) của $\partial\Omega$, ánh xạ F có thể thác triển thành hàm nhẵn xác định cho đến tận biên của miền Ω. Gọi U là một lân cận của $(0,0)$. Khi đó, tồn tại một lân cận V của $(0,0)$ sao cho

$$F(\overline{\Omega} \cap V) \subset \overline{\Omega} \cap U. \tag{3.1}$$

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử $F = (f, g) \in Aut(\Omega)$. Gọi U, V là hai lân cận của $(0,0)$ sao cho (3.1) đúng. Khi đó, với mọi $(z_1, z_2) \in V$, ta có* *(i)* $g(z_1, 0) = 0$.

(ii) $f(z_1, z_2) = f(z_2)$

Bây giờ chứng minh của Định lý 3.1.1 được suy ra từ các bổ đề trên.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Các kết quả chính của luận án:

- Chứng minh định lý đặc trưng cho miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact và hạng của dạng Levi tại điểm tụ quĩ đạo $\geq n - 2$.
- Chứng minh định lý đặc trưng cho miền lồi tuyến tính không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.
- Chứng minh giả thuyết Greene-Krantz cho một lớp miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Hướng nghiên cứu còn có các câu hỏi mở sau đây:

1. Phải chăng các định lý đặc trưng cho các miền trong $\mathbb{C}^n$ vẫn đúng mà không cần giả thiết về hạng của dạng Levi cũng như điều kiện lồi tuyến tính?

2. Phải chăng mỗi miền có nhóm tự đẳng cấu không compact với biên nhẵn, kiểu hữu hạn và biên lồi tuyến tính song chỉnh hình với một mô hình thuần nhất, tức là đa thức $P(z')$ trong Định lý 2.3.2 là thuần nhất?

3. Phải chăng Định lý Kim-Krantz vẫn còn đúng?