BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THÀNH CHUNG

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM YẾU CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC KHÔNG TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHÔNG TRƠN TRONG R^N

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN HỌC

MÃ SỐ: 62 46 01 05

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI – 2010

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH TẠI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Người hướng dẫn khoa học

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản bien 3:

Luận án tiến sĩ sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp nhà nước họp tại Viện Nghiên cứu văn hoá vào hồi giờ ngày tháng năm 2010

Có thể tìm đọc luận án tại:

- Đại học quốc gia Hà Nội

- Thư viện Quốc gia

MỞ ĐẦU

Từ giữa thế kỷ thứ 19, phương trình đạo hàm riêng đã trở thành một phương tiện nghiên cứu chủ yếu trong nhiều ngành toán học khác nhau, là chiếc cầu nối giữa các ngành toán ứng dụng và toán lý thuyết. Vấn đề chủ yếu xuyên suốt trong nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng của phương trình đạo hàm riêng đó là bài toán tồn tại nghiệm. Cho đến đầu thế kỷ 20, nghiệm của phương trình đạo hàm riêng được hiểu theo một cách chung nhất là các nghiệm cổ điển, tức là nghiệm khả vi đến cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình. Tuy nhiên, một điều dễ nhận thấy là để phản ánh tương đối chính xác một quá trình vật lý hay cơ học thì việc chỉ quan tâm đến nghiệm cổ điển của phương trình đạo hàm riêng thôi là chưa đủ. Vì vậy, để việc nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng có ý nghĩa hơn với đối tượng mà nó phản ánh thì việc mở rộng khái niệm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng là một vấn đề cần thiết. Do đó khái niệm nghiệm suy rộng ra đời. Người ta có thể đưa ra nhiều định nghĩa khác nhau về nghiệm suy rộng nhưng phải đảm bảo một nguyên tắc: vừa chặt chẽ về mặt toán học vừa có ý nghĩa về phương diện vật lý.

Trong bối cảnh đó, hướng nghiên cứu của chúng tôi đặt ra là: sử dụng phương pháp biến phân nghiên cứu sự tồn tại nghiệm suy rộng (nghiệm yếu) của các bài toán biên đối với phương trình và hệ phương trình elliptic không tuyến tính. So với các phương pháp thường được sử dụng như: phương pháp toán tử đơn điệu, phương pháp nghiệm trên nghiệm dưới, phương pháp nguyên lý điểm bất động và phương pháp bậc ánh xạ, phương pháp biến phân tỏ ra có hiệu lực hơn cả. Ý tưởng của phương pháp biến phân áp dụng vào phương trình đạo hàm riêng dựa trên cơ sở lý thuyết điểm tới hạn, mà nộidung của nó là đưa bài toán đang xét về việc nghiên cứu một phiếm hàm J khả vi liên tục theo một nghĩa nào đó trong không gian Banach X được xây dựng thích hợp (gọi là phiếm năng lượng liên kết) sao cho điểm tới hạn của phiếm hàm J là nghiệm suy rộng của bài toán ban đầu. Một phương pháp thông thường để tìm điểm tới hạn của một phiếm hàm là tìm điểm cực tiểu hoá của phiếm hàm đó. Tuy nhiên, việc tìm điểm cực tiểu của một phiếm hàm không hề đơn giản. Vả lại, lớp các phiếm hàm có thể cực tiểu hoá tương đối hạn chế. Vì vậy, trong nhiều trường hợp người ta quan tâm đến các điểm yên ngựa (không phải cực tiểu) của các phiếm hàm năng lượng. Cơ sở để nghiên cứu điểm yên ngựa của phiếm hàm là các bổ đề biến dạng và điều kiện compact. Một kết quả quan trọng khẳng định sự tồn tại điểm tới hạn của phiếm hàm J trong không gian Banach X đó là "Định lý qua núi" (Mountain pass theorem). Định lý qua núi lần đầu tiên được đưa ra vào năm 1950 bởi R. Courant cho các phiếm hàm xác định trong không gian hữu hạn chiều. Năm 1973, A. Ambrosetti và P. Rabinowitz đã chứng minh định lý qua núi cho phiếm hàm khả vi Fréchet liên tục trong một không gian Banach.

Định lý 0.1 (xem [1]). *Giả sử* $(X, \|.\|)$ *là một không gian Banach,* $J : X \to \mathbb{R}$ *là một phiếm hàm khả vi Fréchet liên tục trên* X*, thoả mãn điều kiện Palais-Smale, tức là với mọi dãy* $\{u_n\} \subset X$ *thoả mãn* $|J(u_n)| \leqq C$*,* $\forall n$ *và* $DJ(u_n) \to 0$ *khi* $n \to \infty$*, đều có thể trích được một dãy con hội tụ trong* X*. Hơn nữa,* $J(0) = 0$ *và phiếm hàm* J *thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) *Tồn tại* α, $r > 0$ *sao cho* $J(v) \geqq \alpha$ *với mọi* $v \in X$, $||v|| = r$;

(ii) *Tồn tại* $v_0 \in X$ *với* $||v_0|| > r$ *sao cho* $J(v_0) < 0$.

Đặt

$$\overline{c} = \inf \left\{ \max_{t \in [0,1]} J(\varphi(t)) : \varphi \in C([0,1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v_0 \right\}.$$

Khi đó, tồn tại $u \in X$ *sao cho* $\overline{c} = J(u) \geqq \alpha > 0$ *và* $DJ(u) = 0$.

Lý thuyết điểm tới hạn cùng với định lý qua núi đã góp phần quan trọng trong việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu cho một lớp khá rộng các bài toán biên đối với phương trình và hệ phương trình đạo hàm riêng không tuyến tính. Những cải tiến của định lý qua núi cùng với điều kiện Palais-Smale đã được nhiều nhà toán học lớn trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Năm 1989, D.M. Đức trong công trình [9] đã thiết lập lại bổ đề biến dạng và chứng minh định lý qua núi cho lớp các phiếm hàm khả vi liên tục yếu trong không gian Banach (xem Định nghĩa 0.1). Kết quả này đặc biệt hữu ích khi nghiên cứu các bài toán elliptic với hệ số kỳ dị.

Định nghĩa 0.1 **(xem [9]).** *Cho X là một không gian Banach. Ta nói phiếm hàm $J : X \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục yếu trên X nếu thỏa mãn các điều kiện:*

(i) *J liên tục trên X;*

(ii) *Với mọi $u \in X$, tồn tại một ánh xạ tuyến tính $DJ(u) : X \to \mathbb{R}$ sao cho*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = DJ(u)(v), \quad \forall v \in X;$$

(iii) *Với mỗi $v \in X$, ánh xạ $u \mapsto DJ(u)(v)$ liên tục X.*

Ký hiệu $C_w^1(X)$ là tập các phiếm hàm khả vi liên tục yếu trên X. Dễ nhận thấy $C^1(X) \subset C_w^1(X)$, trong đó $C^1(X)$ là tập các phiếm hàm khả vi Fréchet liên tục trên X. Cho đến trước năm 2005, chưa có một nghiên cứu nào liên quan đến việc áp dụng định lý qua núi đối với các phiếm hàm khả vi liên tục yếu, mặc dù ý tưởng này mở ra một hướng nghiên cứu điều kiện tồn tại nghiệm yếu cho một lớp rộng lớn các bài toán biên đối với phương trình và hệ phương trình elliptic không tuyến tính, mà phiếm hàm năng lượng liên kết với nó không khả vi Fréchet.

Đối tượng mà chúng tôi đề cập đến trong luận án là sự tồn tại nghiệm yếu của các phương trình (và hệ phương trình) elliptic có dạng:

$$-\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = f(x, u), \quad x \in \Omega, \tag{0.1}$$

trong đó Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^N$. Chú ý rằng, một số dạng thường gặp của phương trình (0.1) là các phương trình

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, u), \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

$$- \operatorname{div}(h(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \quad x \in \Omega, \tag{0.3}$$

trong đó, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ thoả mãn một số điều kiện nhất định. Một bài toán với lớp toán tử trên được nghiên cứu rộng rãi là toán tử Laplace $-\Delta$. Toán tử $-\operatorname{div}(a(x,\nabla u))$ xuất hiện trong các bài toán khuếch tán không tuyến tính mà cổ điển nhất là mô hình toán học của hiện tượng truyền nhiệt trong vật thể, hiện tượng truyền sóng trong không gian, mô hình toán học của dòng chất lỏng không Newton, ... Phương trình dạng (0.1) với $f(x,u)$ là một biểu thức phi tuyến đối với u bao gồm nhiều mô hình toán học trong cơ học lượng tử, cơ học trong môi trường liên tục, lý thuyết trường,... Những kết quả đạt được từ những nghiên cứu đó vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết vừa có ý nghĩa về mặt ứng dụng (xem [8]).

Mới đây, P. De Nápoli và M.C. Mariani [7] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các bài toán Dirichlet cho một lớp phương trình elliptic tổng quát dạng (0.1) trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ có biên trơn, ở đó hàm $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $a = a(x,\xi)$ được giả thiết là đạo hàm liên tục theo biến ξ của một hàm khả vi liên tục $A : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tức là $a(x,\xi) = \frac{\partial A(x,\xi)}{\partial \xi}$ và thoả mãn điều kiện tăng dạng

$$|a(x,\xi)| \leqq C(1 + |\xi|^{p-1}) \tag{0.4}$$

với mọi $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $p \in (1,+\infty)$. Hàm $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được giả thiết là một hàm Carathéodory và thoả mãn điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz [1], tức là tồn tại hằng số $\mu > p$ sao cho

$$0 < \mu F(x,z) \leqq z f(x,z) \tag{0.5}$$

với mọi $x \in \Omega$ và $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, trong đó $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)dt$. Khi đó, nghiệm của bài toán (0.1) chính là điểm tới hạn (nếu tồn tại) của phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán được xác định bởi công thức:

$$J(u) = \int_\Omega A(x,\nabla u)dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Tiếp tục nghiên cứu của P. De Nápoli và M.C. Mariani, nhiều tác giả khác đã mở rộng kết quả này bằng cách đặt ra các giả thiết khác nhau cho vế phải hoặc xét $\Omega = \mathbb{R}^N$ (xem [13, 14]). Năm 2005, D.M. Đức và N.T. Vũ đã nghiên cứu một trường hợp kỳ dị của phương trình dạng (0.1), trong đó giả thiết (0.4) được thay bởi giả thiết yếu hơn sau đây:

$$|a(x,\xi)| \leqq C(h_0(x) + h_1(x)|\xi|^{p-1}) \tag{0.6}$$

với mọi $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, $p \in (1, +\infty)$, $h_0 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ và $h_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$, đồng thời $h_0(x) \geqq 0$, $h_1(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \Omega$ (xem [10, 22]). Rõ ràng, với sự xuất hiện giả thiết $h_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$, phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán Dirichlet (0.1) có thể không xác định trong toàn không gian Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$. Do đó, nghiệm của bài toán chỉ có thể tồn tại trong một không gian con H nào đó của không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$. Vì lý do đó, bài toán (0.1) trong trường hợp này được chúng tôi gọi là "bài toán biên không đều" của phương trình loại elliptic.

Không gian con H nói trên là loại không gian Sobolev có trọng được xác định bởi

$$H = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega h_1(x)|\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

với chuẩn

$$\|u\|_H = \left(\int_\Omega h_1(x)|\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

và phiếm hàm $J : H \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục yếu tức là $J \in C^1_w(H)$. Giả thiết (0.5) đảm bảo cho mọi dãy Palais-Smale của phiếm hàm J bị chặn và do đó thoả mãn điều kiện Palais-Smale trong H. Như vậy, nghiệm yếu của bài toán Dirichlet (0.1) sẽ tồn tại nhờ định lý qua núi cho phiếm hàm khả vi liên tục yếu trong H (xem [9]). Từ công trình nghiên cứu này, một vấn đề nảy sinh trong lý thuyết biến phân là: liệu khi thay một phiếm hàm khả vi Fréchet liên tục bởi một phiếm hàm khả vi liên tục yếu, các kết quả biến phân cổ điển còn đúng hay không? Một số vấn đề liên quan đến câu hỏi trên có thể tìm thấy trong các công trình nghiên cứu của H.Q. Toàn và N.Q. Anh (xem [16, 17, 18, 21]). Đặc biệt, nguyên lý cực tiểu dạng cổ điển trong [19] đã được chứng minh cho lớp các phiếm hàm khả vi liên tục yếu.

Định lý 0.2 **(xem [17]).** *Cho X là một không gian Banach. Giả sử $J \in C_w^1(X)$ và thoả mãn các điều kiện:*

(i) *J bị chặn dưới, $\underline{c} = \inf_X J$;*

(ii) *J thoả mãn điều kiện Palais-Smale trên X.*

Khi đó, tồn tại $u \in X$ sao cho $J(u) = \underline{c}$ và $DJ(u) = 0$.

Bằng cách áp dụng nguyên lý biến phân I. Ekeland [11], định lý qua núi cùng nguyên lý cực tiểu được thiết lập lại cho phiếm hàm khả vi liên tục yếu trong không gian Banach, các tác giả Hoàng Quốc Toàn và Ngô Quốc Anh đã nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với các phương trình dạng (0.1), (0.2), (0.3) có hệ số không trơn trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ và nhận được một số kết quả liên quan đến sự tồn tại, không tồn tại và tính đa nghiệm.

Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình dạng (0.1), (0.2) và (0.3) với các vấn đề cụ thể như sau:

1. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các bài toán Dirichlet đối với phương trình dạng (0.1), (0.2) và (0.3) với hệ số không trơn trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ không bị chặn.

2. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các hệ phương trình elliptic với hệ số không trơn và suy biến trong miền bị chặn hoặc $\mathbb{R}^N$.

3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các bài toán biên đối với phương trình elliptic tựa tuyến tính loại p-Laplacian.

4. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính với thế vị kiểu Hardy.

Nội dung luận án đã được công bố trong 7 bài báo khoa học ([1, 3, 5, 6, 7, 9, 10], "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án") và được trình bày thành 4 chương.

Tác giả luận án xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS. TS. Hoàng Quốc Toàn, khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, người đã dìu dắt tác giả từ những ngày đầu làm khoa học và trong suốt quá trình làm luận án. Dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Hoàng Quốc Toàn, sự giúp đỡ của các Thầy Cô và các anh chị em trong seminar Bộ môn Giải tích, tác giả đã học được cách làm việc trong một môi trường khoa học, chuyên nghiệp. Tác giả luận án đặc biệt cảm ơn sự cộng tác và chia sẽ những thông tin vô cùng hữu ích của ThS. Ngô Quốc Anh, một người bạn nhiệt tình và thân thiết của tác giả. Tác giả cũng muốn gửi lời cảm ơn chân thành đến các Thầy giáo đã tham gia phản biện góp phần hoàn thiện luận án. Luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu tác giả không nhận được sự giúp đỡ từ Ban Giám hiệu, Phòng Sau đại học, Khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học KHTN - ĐHQG Hà Nội, Ban Giám hiệu, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Quảng Bình. Cuối cùng, tác giả xin được chia sẽ những thành công của mình với gia đình, người thân và bạn bè.

Hà Nội, ngày 10 tháng 05 năm 2010

Nguyễn Thành Chung

Chương 1

BÀI TOÁN BIÊN KHÔNG ĐỀU ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG MIỀN KHÔNG BỊ CHẶN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của một lớp bài toán biên không đều đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính trong các miền không bị chặn có biên trơn. Kết quả của chúng tôi đã được công bố trong công trình [1] trên tạp chí Nonlinear Analysis (xem "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án").

1.1. BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH TRONG MIỀN KHÔNG BỊ CHẶN

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqq 3)$ là một miền không bị chặn có biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán Dirichlet sau đây:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h(x)\nabla u) + q(x)u &= f(x,u) \quad \text{trong } \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \\ u(x) &\to 0 \quad \text{khi } |x| \to +\infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó các hàm h, $q : \Omega \to \mathbb{R}$ thoả mãn các giả thiết:

$(\mathcal{H})$ $h \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h(x) \geq 1$, với mọi $x \in \Omega$;

$(\mathcal{Q})$ $q \in C(\Omega)$, tồn tại $q_0 > 0$ sao cho $q(x) \geqq q_0 > 0$ với mọi $x \in \Omega$, và $q(x) \to +\infty$ khi $|x| \to +\infty$.

Trước hết, chú ý rằng nếu $h \equiv 1$, bài toán (1.1) đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác nhau chẳng hạn [5, 6, 7, 14, 20]. Trong trường hợp Ω là một bị chặn có biên trơn, hàm $h \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \Omega$, bài toán đã được nghiên cứu trong [10, 21]. Bởi sự xuất hiện của hàm h, bài toán elliptic đang xét là không đều theo nghĩa phiếm hàm năng lượng liên kết với nó không xác định trong toàn không gian Sobolev thông thường $H^1_0(\Omega)$. Trong chương này, chúng tôi sẽ sử dụng kỹ thuật biến phân để nghiên cứu bài toán (1.1). Giả thiết rằng:

$(\mathcal{F}1)$ $f(x,z) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ với mọi $x \in \Omega$;

$(\mathcal{F}2)$ Tồn tại hằng số $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ và một hàm không âm $\tau \in L^{p_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, trong đó $p_0 = \frac{2N}{2N-(p+1)(N-2)}$, sao cho

$$|f'_z(x,z)| \le \tau(x)|z|^{p-1}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall z \in \mathbb{R};$$

$(\mathcal{F}3)$ Tồn tại $\mu > 2$ sao cho $0 < \mu F(x,z) \le z.f(x,z)$, $\forall x \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, trong đó, $F(x,z) = \int_0^z f(x,s)ds$.

Với giả thiết $h \in L^1_{loc}(\Omega)$, phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán (1.1) được xác định như sau:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [h(x)|\nabla u|^2 + q(x)|u|^2]dx - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

trong đó $F(x,u) = \int_0^u f(x,u)dx$. Nói chung phiếm hàm J không xác định với mọi $u \in H^1_0(\Omega)$, và nghiệm yếu của bài toán chỉ có thể tồn tại trong không gian con H_1 của $H^1_0(\Omega)$ được xác định bởi

$$H_1 = \left\{ u \in E_1 : \int_\Omega [h(x)|\nabla u|^2 + q(x)|u|^2]dx < \infty \right\}.$$

Khi đó, H_1 là không gian Hilbert và các phép nhúng sau là liên tục: $H_1 \hookrightarrow H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^i(\Omega)$, $i \in [2, 2^\star]$, $2^\star = \frac{2N}{N-2}$. Hơn nữa, với giả thiết $(\mathcal{Q})$ thì phép nhúng $H_1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compact (xem [6]) và phiếm hàm J khả vi liên tục yếu trong H_1, tức là $J \in C^1_w(H_1)$ (xem Định nghĩa 0.1).

1.2. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM YẾU

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1.1) trong không gian H_1. Khó khăn chính là sự xuất hiện của hàm $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ khiến cho phiếm hàm J có thể không khả vi Fréchet liên tục trên H_1. Do đó chúng ta không thể sử dụng định lý qua núi dạng cổ điển trong [1] mà chỉ có thể dùng định lý qua núi cho phiếm hàm khả vi liên tục yếu của D.M. Đức trong [9]. Ta nói $u \in H_1$ là nghiệm yếu của bài toán (1.1) nếu

$$\int_\Omega [h(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi + q(x)u\varphi]dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Kết quả chính của chúng tôi trong chương này được phát biểu trong định lý dưới đây:

Định lý 1.1**.** *Giả thiết rằng các điều kiện $(\mathcal{H})$, $(\mathcal{Q})$ và $(\mathcal{F}1)-(\mathcal{F}3)$ được thoả mãn. Khi đó, bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường trong không gian H_1.*

Chương 2

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA MỘT LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHÔNG TRƠN VÀ SUY BIẾN

Chương này dành cho việc nghiên cứu một lớp hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính suy biến và kỳ dị trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (có thể bị chặn hoặc không bị chặn). Nội dung chủ yếu được viết dựa trên hai bài báo [3, 5] (xem "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án") và được chia làm hai phần.

2.1. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHÔNG TRƠN VÀ SUY BIẾN TRONG $\mathbb{R}^N$

Trong mục này, chúng tôi xét hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính dạng:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h_1(x)\nabla u) + a(x)u &= f(x,u,v) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N, \\ -\operatorname{div}(h_2(x)\nabla v) + b(x)v &= g(x,u,v) \quad \text{trong } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Nếu các hàm số $h_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ và $h_i(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ bài toán đã được nghiên cứu trong Chương 1. Khi đó, để chứng minh phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán thoả mãn điều kiện Palais-Smale, chúng ta phải dùng kết quả về tính compact trong phép nhúng $E_2 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^2)$. Rõ ràng giả thiết $h_i(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ là rất quan trọng. Điều này dẫn đến phép nhúng $H_2 \hookrightarrow E_2$ liên tục. Khi giả thiết này không còn thoả mãn, vấn đề sẽ trở nên khó khăn hơn. Trong mục này, chúng tôi sẽ giải quyết cho những trường hợp như vậy.

Giả sử các hàm $a, b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ và $h_i : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $i = 1, 2$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$(\mathcal{A} - \mathcal{B})$ $a, b \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, tồn tại các hằng số $a_0, b_0 > 0$ sao cho $a(x) \geqq a_0$, $b(x) \geqq b_0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.

$(\mathcal{H})$ $h_i \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$ và tồn tại các hằng số $\alpha \in (0, 2)$, $\gamma_0 > 0$ sao cho $h_i(x) \geqq \gamma_0 |x|^\alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$.

Với các giả thiết về h_1, h_2 như vậy, hệ (2.1) có thể suy biến tại điểm $x = 0$. Hơn nữa, trong giả thiết $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$, các hàm a, b không đòi hỏi điều kiện bức, tức là $a(x) \to \infty$ và $b(x) \to \infty$ khi $|x| \to \infty$. Những khó khăn nảy sinh được khắc phục nhờ kỹ thuật của M. Mihăilescu [14] cùng với bất đẳng thức Caffarelli - Kohn - Nirenberg dạng cổ điển trong [3].

Liên quan đến vế phải, chúng tôi giả thiết rằng các hàm $F, f, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1, $\nabla F = (f, g)$ và thoả mãn các điều kiện:

$(\mathcal{F}1)$ $f(x, 0, 0) = g(x, 0, 0) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$;

$(\mathcal{F}2)$ Tồn tại các hàm số không âm $\tau_1 \in L^{r_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\tau_2 \in L^{s_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $r_0 = \frac{2N}{2N-(r+1)(N-2+\alpha)}$, $s_0 = \frac{2N}{2N-(s+1)(N-2+\alpha)}$, trong đó $r, s \in \left(1, \frac{N+2-\alpha}{N-2+\alpha}\right)$, $\alpha \in (0, 2)$ sao cho

$$|\nabla f(x, w)| + |\nabla g(x, w)| \leqq \tau_1(x)|w|^{r-1} + \tau_2(x)|w|^{s-1}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^N, w = (u, v) \in \mathbb{R}^2$;

$(\mathcal{F}3)$ Tồn tại $\mu > 2$ sao cho $0 < \mu F(x, w) \leqq w \cdot \nabla F(x, w)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^N$ và $w \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Giả sử không gian H_2 là bổ sung của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ theo chuẩn

$$\|w\|_{H_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[h_1(x)|\nabla u|^2 + h_2(x)|\nabla v|^2 + a(x)|u|^2 + b(x)|v|^2\right] dx.$$

Khi đó H_2 là không gian Hilbert và phép nhúng $H_2 \hookrightarrow L^{2_\alpha^\star}(\mathbb{R}^N)$ liên tục, $2_\alpha^\star = \frac{2N}{N-2+\alpha}$. Ta nói $w = (u, v) \in H_2$ là một nghiệm yếu của hệ phương trình (2.1) nếu

$$\int_{\mathbb{R}^N} [h_1(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi_1 + h_2(x)\nabla v \cdot \nabla\varphi_2 + a(x)u\varphi_1 + b(x)v\varphi_2]\, dx -$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N} [f(x, u, v)\varphi_1 + g(x, u, v)\varphi_2]\, dx = 0, \quad \forall\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^2).$$

Định lý 2.1. *Giả thiết rằng các điều kiện $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$, $(\mathcal{H})$ và $(\mathcal{F}1) - (\mathcal{F}3)$ được thỏa mãn. Khi đó, hệ phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường trong H_2.*

2.2. SỰ KHÔNG TỒN TẠI VÀ TÍNH ĐA NGHIỆM CỦA MỘT LỚP HỆ PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ KHÔNG TRƠN VÀ SUY BIẾN TRONG MIỀN BỊ CHẶN

Mục này dành để nghiên cứu sự không tồn tại và tính đa nghiệm của bài toán Dirichlet đối với một lớp hệ elliptic nửa tuyến tính trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ có biên trơn. Xét bài toán elliptic dạng

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(h_1(x)\nabla u) &= \lambda F_u(x, u, v) \quad \text{trong} \quad \Omega \\ -\operatorname{div}(h_2(x)\nabla v) &= \lambda F_v(x, u, v) \quad \text{trong} \quad \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{trên} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

trong đó $\nabla F = (F_u, F_v)$ và λ là một tham số thực, tồn tại các hằng số $\alpha, \beta \in (0, 2)$ sao cho

$(\mathcal{H}1)$ $\liminf_{x\to z} |x - z|^{-\alpha} h_1(x) > 0, \forall z \in \overline{\Omega}$;

$(\mathcal{H}2)$ $\liminf_{x\to z} |x - z|^{-\beta} h_2(x) > 0, \forall z \in \overline{\Omega}$.

Đối với vế phải, chúng tôi giả thiết rằng $F(x,t,s)$ là một hàm thuộc lớp C^1 trên $\Omega \times [0,\infty) \times [0,\infty)$ và thoả mãn các điều kiện sau đây:

($\mathcal{F}1$) Tồn tại $C_1, C_2 > 0$ sao cho $|F_t(x,t,s)| \leqq C_1 t^{\gamma} s^{\delta+1}$, $|F_s(x,t,s)| \leqq C_2 t^{\gamma+1} s^{\delta}$ với mọi $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \Omega$ và các số $\gamma, \delta > 1$ với $\frac{\gamma+1}{p} + \frac{\delta+1}{q} = 1$, $\frac{\gamma+1}{2^\star_\alpha} + \frac{\delta+1}{2^\star_\beta} < 1$, và $\gamma + 1 < p < 2^\star_\alpha = \frac{2N}{N-2+\alpha}$, $\delta + 1 < q < 2^\star_\beta = \frac{2N}{N-2+\beta}$, $\alpha, \beta \in (0,2)$;

($\mathcal{F}2$) Tồn tại các hằng số η, s_0, $t_0 > 0$ sao cho $F(x,t,s) \leqq 0$ với mọi $(t,s) \in \mathbb{R}^2$ với $t^p + s^q \leqq \eta$ và $F(x,t_0,s_0) > 0$ và $\forall x \in \Omega$, trong đó p và q được cho bởi ($\mathcal{F}1$);

($\mathcal{F}3$) Hàm F thoả mãn $\limsup_{|(t,s)|\to\infty, t,s>0} \frac{F(x,t,s)}{t^{\gamma+1}s^{\delta+1}} \leqq 0$ đều theo biến $x \in \Omega$.

Với sự xuất hiện các giả thiết về h_1 và h_2, hệ (2.2) có thể suy biến tại nhiều điểm trong Ω và nghiệm của nó sẽ tồn tại trong một không gian thích hợp $H_3 = H^1_0(\Omega, h_1) \times H^1_0(\Omega, h_2)$, ở đó $H^1_0(\Omega, h_i)$, $i = 1, 2$ là bổ sung của $C^\infty_0(\Omega)$ theo các chuẩn tương ứng: $\|u\|_{h_i} = \left(\int_\Omega h_i(x)|\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $u \in C^\infty_0(\Omega)$, $i = 1, 2$ và chuẩn của H_3 được xác định bởi $\|w\|_{H_3} = \|u\|_{h_1} + \|v\|_{h_2}$, $w = (u,v) \in H_3$. Hơn nữa, từ những kết quả của P. Caldiroli và R. Musina [4], ta có phép nhúng $H_3 \hookrightarrow L^i(\Omega) \times L^j(\Omega)$ liên tục với $i \in [1, 2^\star_\alpha]$, $j \in [1, 2^\star_\beta]$ và compact với $i \in [2, 2^\star_\alpha)$, $j \in [1, 2^\star_\beta)$. Ta nói $w = (u,v) \in H_3$ là một nghiệm yếu của hệ (2.2) nếu

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (h_1(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi_1 + h_2(x)\nabla v \cdot \nabla\varphi_2)dx\\ &-\lambda\int_\Omega [F_u(x,u,v)\varphi_1 + F_v(x,u,v)\varphi_2]dx = 0, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\infty_0(\Omega, \mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

Định lý 2.2. *Với các giả thiết ($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}2$) và ($\mathcal{F}1$), tồn tại hằng số $\underline{\lambda} > 0$ sao cho với mọi $\lambda < \underline{\lambda}$, hệ (2.2) chỉ có nghiệm tầm thường.*

Định lý 2.3. *Với các giả thiết ($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}2$) và ($\mathcal{F}1$)-($\mathcal{F}3$), tồn tại hằng số $\overline{\lambda} > 0$ sao cho với mọi $\lambda \geqq \overline{\lambda}$, hệ (2.2) có ít nhất hai nghiệm yếu phân biệt, không âm và không tầm thường.*

Chương 3

BÀI TOÁN BIÊN ELLIPTIC TỰA TUYẾN TÍNH LOẠI p-LAPLACIAN TRONG MIỀN BỊ CHẶN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu các bài toán biên đối với phương trình elliptic tựa tuyến tính tổng quát loại p-Laplacian trong các miền bị chặn có biên trơn. Nội dung chương 3 được viết dựa trên bài báo [6, 7] (xem "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án"), và được chia làm hai phần:

3.1. BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC TỰA TUYẾN TÍNH LOẠI p-LAPLACIAN TRONG MIỀN BỊ CHẶN

Trong mục này, chúng tôi xét bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic tựa tuyến tính tổng quát loại p-Laplacian:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) &= \lambda f(x,u) \quad \text{trong } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqq 3$) là một miền bị chặn có biên trơn. Xuất phát từ những ý tưởng trong các công trình của M. Mihăilescu và V. Rădulescu [15], mục đích của chúng tôi trong phần này là nghiên cứu bài toán (3.1) với tham số λ và vế phải f đổi dấu. Đây là một sự mở rộng tự nhiên từ các kết quả trong [10, 21], ở đó các tác giả đã đòi hỏi vế phải thoả mãn điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz (0.5).

Giả sử hàm $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $a = a(x, \xi)$, là đạo hàm liên tục theo biến ξ của hàm khả vi liên tục $A : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A = A(x, \xi)$, tức là, $a(x, \xi) = \frac{\partial A(x,\xi)}{\partial \xi}$ và $A(x, 0) = 0, \forall x \in \Omega$, đồng thời a và A thoả mãn các giả thiết sau đây:

($\mathcal{A}1$) $|a(x, \xi)| \leqq C(h_0(x) + h_1(x)|\xi|^{p-1})$ với mọi $\xi \in \mathbb{R}^N$, $x \in \Omega$, trong đó $h_0 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $1 < p < N$, $h_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h_0(x) \geqq 0$ và $h_1(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \Omega$;

($\mathcal{A}2$) Bất đẳng thức $0 \leqq (a(x, \xi) - a(x, \psi)) \cdot (\xi - \psi)$ thoả mãn với mọi $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$, $x \in \Omega$. Hơn nữa, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\xi = \psi$;

($\mathcal{A}3$) Tồn tại hằng số $k_0 > 0$ sao cho

$$A(x, \frac{\xi + \psi}{2}) \leqq \frac{1}{2}A(x, \xi) + \frac{1}{2}A(x, \psi) - k_0 h_1(x)|\xi - \psi|^p$$

với mọi $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$, và $x \in \Omega$, tức là, A là p-lồi đều theo biến thứ hai;

($\mathcal{A}4$) Tồn tại hằng số $k_1 > 0$ sao cho $k_1 h_1(x)|\xi|^p \leqq a(x, \xi) \cdot \xi \leqq pA(x, \xi)$ với mọi $\xi \in \mathbb{R}^N$, $x \in \Omega$.

Đối với vế phải, chúng tôi giả thiết rằng $f : \Omega \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory thoả mãn các điều kiện sau:

($\mathcal{F}1$) $f(x, 0) = 0$, $|f(x, t)| \leqq Ct^{p-1}$ với mọi $t \in [0 + \infty)$, $x \in \Omega$, $C > 0$;

($\mathcal{F}2$) Tồn tại hai hằng số $t_0, t_1 > 0$ sao cho $F(x, t) \leqq 0$ với những giá trị $0 \leqq t \leqq t_0$ và $F(x, t_1) > 0$, với mọi $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}3$) Hơn nữa, $\limsup_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^p} \leqq 0$ đều theo biến $x \in \Omega$, trong đó $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)ds$.

Khi đó, phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán (3.1) được cho bởi công thức

$$J(u) = \int_\Omega A(x, \nabla u)dx - \lambda \int_\Omega F(x, u)dx,$$

trong đó $F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt$, hoàn toàn xác định và khả vi liên tục yếu trong không gian Banach

$$H_4 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega h_1(x)|\nabla u|^p dx < \infty \right\}$$

với chuẩn $\|u\|_{H_4} = \left(\int_\Omega h_1(x)|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Ta nói $u \in H_4$ là một nghiệm yếu của bài toán (3.1) nếu

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot \nabla\varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Định lý 3.1**.** *Với các giả thiết* $(\mathcal{A}1)$-$(\mathcal{A}4)$ *và* $(\mathcal{F}1)$*, tồn tại hằng số* $\underline{\lambda} > 0$ *sao cho với mọi* $\lambda < \underline{\lambda}$*, bài toán (3.1) chỉ có nghiệm tầm thường.*

Định lý 3.2**.** *Với các giả thiết* $(\mathcal{A}1)$-$(\mathcal{A}4)$ *và* $(\mathcal{F}1)$-$(\mathcal{F}3)$*, tồn tại hằng số* $\overline{\lambda} > 0$ *sao cho với mọi* $\lambda \geqq \overline{\lambda}$*, bài toán (3.1) có ít nhất hai nghiệm yếu phân biệt, không âm và không tầm thường.*

3.2. BÀI TOÁN ELLIPTIC TỰA TUYẾN TÍNH LOẠI p-LAPLACIAN VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN PHI TUYẾN

Nội dung chính của mục này là nghiên cứu tính đa nghiệm cho một lớp các bài toán elliptic tựa tuyến tính loại p-Laplacian dạng:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda f(u) & \text{trong} \quad \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} = \mu g(u) & \text{trên} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqq 3)$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn, n là vectơ pháp tuyến ngoài đối với biên $\partial\Omega$. Chúng tôi đặt ra các giả thiết như sau:

$(\mathcal{H}1)$ Các hàm số f và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, tồn tại hai hằng số $M_1, M_2 > 0$ sao cho

$$|f(t)| \leqq M_1(1 + |t|^{p-1}), \quad |g(t)| \leqq M_2|t|^{p-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

($\mathcal{H}2$) Hàm f thoả mãn

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{|t|^{p-1}}=0;$$

($\mathcal{H}3$) Tồn tại hằng số $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $F(t_0) = \int_0^{t_0} f(t)dt > 0$ hoặc $G(t_0) = \int_0^{t_0} g(t)dt > 0$.

Để ý rằng với các giả thiết ($\mathcal{H}1$), điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz (0.5) không thoả mãn. Vì vậy, để chứng minh định lý về sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.2), chúng tôi áp dụng nguyên lý biến phân ba điểm tới hạn của G. Bonanno trong [2]. Ta nói $u \in W^{1,p}(\Omega)$ là một nghiệm yếu của bài toán (3.2) nếu

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi + |u|^{p-2}u\varphi)dx - \lambda\int_\Omega f(u)\varphi dx - \mu\int_{\partial\Omega} g(u)\varphi d\sigma = 0$$

với mọi $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Định lý 3.3. *Giả thiết rằng các điều kiện ($\mathcal{H}1$)-($\mathcal{H}3$) được thoả mãn. Khi đó, tồn tại $\overline{\mu} > 0$ sao cho với mọi $\mu \in [0, \overline{\mu})$, có một khoảng mở K_μ và hằng số $\delta_\mu > 0$, để với mọi $\lambda \in K_\mu$, bài toán (3.2) có ít nhất hai nghiệm yếu không tầm thường trong không gian $W^{1,p}(\Omega)$ với chuẩn nhỏ hơn δ_μ.*

Chương 4

BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI THẾ VỊ KIỂU HARDY

Trong chương này, chúng tôi dành để nghiên cứu các bài toán biên Dirichlet đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính có kỳ dị kiểu Hardy. Nội dung chủ yếu được viết dựa vào các bài báo [9, 10] (xem "Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án"), và được chia làm hai phần.

4.1. BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI THẾ VỊ KIỂU HARDY VÀ ĐỔI DẤU

Mục này dành để nghiên cứu bài toán elliptic nửa tuyến tính dạng

$$\begin{cases} -\Delta u &= \frac{\mu}{|x|^2}u + \lambda f(x,u) \quad \text{trong} \quad \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{trên} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqq 3)$ là một miền bị chặn chứa gốc với biên trơn $\partial\Omega$, λ và $0 \leqq \mu < \mu^\star$ là các tham số với $\mu^\star = \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ là hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức Hardy, tức là

$$\int_\Omega \frac{|\varphi|^2}{|x|^2}dx \leqq \frac{1}{\mu^\star}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Giả thiết rằng $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm Carathéodory thoả mãn các điều kiện sau:

($\mathcal{F}1$) Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho $|f(x,t)| \leqq Ct$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}2$) Tồn tại hai hằng số δ, $t_0 > 0$ sao cho $F(x,t) \leqq 0$, $F(x,t_0) > 0$ với mọi $0 \leqq t \leqq \delta$, $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}3$) Hơn nữa, $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{F(x,t)}{t^2} \leqq 0$ đều theo $x \in \Omega$, trong đó $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.

Bài toán (4.1) cùng với các điều kiện ($\mathcal{F}1$), ($\mathcal{F}2$) và ($\mathcal{F}3$) là một sự mở rộng hoàn toàn tự nhiên từ kết quả của A. Kristály [12], ở đó các tác giả đòi hỏi hàm f không phụ thuộc vào x. Do đó, kỹ thuật biến phân ở đây dựa trên định lý qua núi và nguyên lý cực tiểu. Ta nói $u \in H_0^1(\Omega)$ là một nghiệm yếu của (4.1) nếu

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \mu \int_\Omega \frac{1}{|x|^2} u\varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Định lý 4.1. *Giả thiết rằng điều kiện ($\mathcal{F}1$) được thoả mãn. Khi đó, với mỗi $\mu \in [0, \mu^\star)$, tồn tại hằng số $\underline{\lambda} > 0$ sao cho với mọi $\lambda < \underline{\lambda}$, bài toán (4.1) chỉ có nghiệm tầm thường.*

Định lý 4.2. *Giả thiết rằng các điều kiện ($\mathcal{F}1$)-($\mathcal{F}3$) đều được thoả mãn. Khi đó, với mỗi $\mu \in [0, \mu^\star)$, tồn tại hằng số $\overline{\lambda} > 0$ sao cho bài toán (4.1) có ít nhất hai nghiệm yếu không âm, không tầm thường với điều kiện $\lambda \geqq \overline{\lambda}$.*

4.2. BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH VỚI THẾ VỊ KIỂU HARDY LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH ĐỐI XỨNG

Xuất phát từ các kết quả nghiên cứu về sự ảnh hưởng của miền đến sự tồn tại nghiệm của bài toán biên trong [23], trong mục này, chúng tôi sẽ nghiên cứu một lớp các bài toán elliptic nửa tuyến tính dạng (4.1) trong trường hợp miền $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geqq 5$), $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geqq 2$) bị chặn có biên trơn và Ω_2 là một hình cầu $k-$chiều bán kính R ($k \geqq 3$), có tâm tại gốc toạ độ và $m + k = N$. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \frac{\mu}{|x|^2}u + h(x)|u|^{q-2}u \quad \text{với } x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{với } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

trong đó $h(x) = |x_2|^l$, các hằng số q và l thoả mãn điều kiện:

$$2 < q < 2^\star + \tau, \quad 2^\star = \frac{2N}{N-2}, \quad \tau = \frac{2}{N-2}\min\{\frac{2(k-2)}{m}, l\}. \tag{4.3}$$

Để ý rằng, giả thiết (4.3) bao hàm các trường hợp dưới tới hạn, tới hạn và trên tới hạn. Nghiệm yếu của bài toán (4.2) sẽ tồn tại như là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng $J : H^1_{0,s}(\Omega) \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \frac{\mu}{|x|^2}|u|^2\right] dx - \frac{1}{q}\int_\Omega h(x)|u|^q dx,$$

trong đó,

$$H^1_{0,s}(\Omega) = \left\{u \in H^1_0(\Omega) : u(x_1, x_2) = u(x_1, |x_2|), \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega\right\}.$$

Định lý 4.3. *Giả sử điều kiện (4.3) được thoả mãn. Khi đó, bài toán (4.2) có ít nhất một nghiệm yếu không tầm thường trong không gian $H^1_{0,s}(\Omega)$ với điều kiện $0 \leqq \mu < \mu^\star$.*

Tiếp theo, chúng tôi xét bài toán (4.2) với một nhiễu $g \in H^{-1}_{0,s}(\Omega)$ và $g \neq 0$, tức là

$$\begin{cases} -\Delta u &= \frac{\mu}{|x|^2}u + h(x)|u|^{q-2}u + g(x) \quad \text{với } x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{với } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Định lý 4.4. *Giả sử rằng điều kiện (4.3) được thoả mãn. Khi đó, với mọi $0 \leqq \mu < \mu^\star$, tồn tại hằng số $\overline{\epsilon}_\mu > 0$ (phụ thuộc μ) sao cho với mọi hàm $g \in H^{-1}_{0,s}(\Omega)$, $0 < \|g\|_{-1} < \epsilon_0$, bài toán (4.4) có ít nhất hai nghiệm yếu không tầm thường trong $H^1_{0,s}(\Omega)$. Hơn nữa, ta còn có $\overline{\epsilon}_\mu \to 0$ khi $\mu \to \mu^\star$.*

KẾT LUẬN

Về nội dung, luận án nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của các bài toán elliptic không tuyến tính có dạng tổng quát:

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) = f(x,u), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

trong đó Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^N$. Hai trường hợp riêng của phương trình (1) là

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$-\operatorname{div}(h(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,u), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

với hàm trọng $h : \Omega \to \mathbb{R}$ thoả mãn một số điều kiện nhất định.

Về phương pháp nghiên cứu, chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân cùng với lý thuyết điểm tới hạn của phiếm hàm khả vi liên tục trong không gian Banach. Bằng việc áp dụng kết hợp các nguyên lý biến phân nổi tiếng như: nguyên lý biến phân Ekeland, định lý qua núi, nguyên lý cực tiểu và nguyên lý ba điểm tới hạn, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán biên đang xét như là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán trong các không gian hàm được xây dựng thích hợp.

Trong chương 1 và chương 2, chúng tôi xét sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán Dirichlet đối với phương trình và hệ phương trình elliptic nửa tuyến tính có phần chính dạng $-\operatorname{div}(h(x)\nabla u)$ trong miền bị chặn, không bị chặn Ω hoặc toàn không gian $\mathbb{R}^N$ với hệ số kỳ dị thể hiện trong các trường hợp sau:

(1) Hàm $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ và $h(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \Omega$ (xem chương 1);

(2) Hàm $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ và $h(x) \geqq \gamma_0|x|^\alpha$, $\alpha \in (0,2)$ với mọi $x \in \Omega$. Khi đó bài toán elliptic được xét có thể suy biến tại điểm $x = 0$ (xem mục 2.1);

(3) Hàm $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ và có thể triệt tiêu tại nhiều điểm trong Ω. Khi đó, bài toán elliptic được xét có thể suy biến tại nhiều điểm trong Ω (xem các mục 2.2).

Rõ ràng, khi độ kỳ dị của hệ số trong phương trình tăng lên, độ phức tạp của bài toán biên cũng tăng lên. Do đó, kỹ thuật nghiên cứu sẽ khó khăn hơn và tinh tế hơn. Hơn nữa, khi bài toán được xét trong miền không bị chặn hoặc toàn không gian $\mathbb{R}^N$ thì phép nhúng compact các không gian Sobolev không còn đúng nữa. Điều này sẽ ảnh hưởng đến việc chứng minh tính nửa liên tục dưới yếu và điều kiện compact Palais-Smale của phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán. Để khắc phục những khó khăn này, ngoài việc đưa vào những giả thiết mang tính kỹ thuật thì chúng tôi phải vận dụng sáng tạo các kỹ thuật biến phân cũng như một số ước lượng liên quan đến không gian Sobolev như bất đẳng thức nội suy, bất đẳng thức Poincaré, bất đẳng thức Caffarelli- Kohn - Nirenberg.

Nét chung của chương 3 là nghiên cứu sự tồn tại và tính đa nghiệm của phương trình elliptic tựa tuyến tính loại p-Laplacian (1) và (2). Trong mục 3.1, chúng tôi xét bài toán Dirichlet đối với phương trình dạng tổng quát (1) trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, hàm a thoả mãn

$$|a(x,\xi)| \leqq c_0(h_0(x) + h_1(x)|\xi|^{p-1}),$$

trong đó $h_0 \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $h_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$, $h_0(x) \geqq 0$, và $h_1(x) \geqq 1$ với mọi $x \in \Omega$. Mục 3.2 nghiên cứu bài toán biên kiểu Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u &= \lambda f(u) \quad \text{trong} \quad \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial n} &= \mu g(u) \quad \text{trên} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

trong đó f, g là các hàm $(p-1)$ dưới tuyến tính tại vô cùng. Để ý rằng trong trường hợp này, các điều kiện kiểu Ambrosetti-Rabinowitz không thoả mãn. Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán (4) chúng tôi dùng đến nguyên lý biến phân 3 điểm tới hạn của B. Ricceri và G. Bonanno [2]. Đây là một trong những nguyên lý biến phân mới được phát hiện và cải tiến trong lý thuyết điểm tới hạn năm 2000.

Trong chương 4, chúng tôi xét hai mô hình bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic nửa tuyến tính có thế vị kiểu Hardy.

Cuối cùng, từ những kết quả nghiên cứu đã được trình bày trong luận án chúng tôi suy tính đến những bước tiếp theo của hướng nghiên cứu này có tính khả thi như sau:

(1) Nghiên cứu các bài toán biên đối với hệ phương trình Hamilton có hệ số kỳ dị;

(2) Nghiên cứu bài toán biên elliptic loại $p(x)$-Laplacian với hệ số kỳ dị trong không gian Sobolev với số mũ biến thiên;

(3) Nghiên cứu các bài toán biên elliptic dạng tổng quát (1) trong không gian Orlicz - Sobolev.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Toan H.Q., Chung N.T. (2009), "Existence of weak solutions for a class of nonuniformly nonlinear elliptic equations in unbounded domains", *Nonlinear Analysis*, **70**, 3987-3996.

[2] Chung N.T (2008), "Existence of weak solutions for a nonuniformly elliptic nonlinear system in $\mathbb{R}^N$", *Electron. J. Diff. Equ.*, **2008** (119), 1-10.

[3] Chung N.T., Toan H.Q. (2009), "Existence result for nonuniformly degenerate semilinear elliptic systems in $\mathbb{R}^N$", *Glasgow Math. J.*, **51**, 561-570.

[4] Chung N.T. (2010), "On the existence of weak solutions for a degenerate and singular elliptic system in $\mathbb{R}^N$", *Acta Appl. Math.*, 110 (1), 47-56.

[5] Chung N.T., Toan H.Q. (2009), "On a class of degenerate and singular elliptic systems in bounded domains", *J. Math. Anal. Appl.*, **360**, 422-431.

[6] Chung N.T., Ngo Q.A. (2009), "A multiplicity result for a class of equations of p-Laplacian type with sign-changing nonlinearities", *Glasgow Math. J.*, **51**, 513-524.

[7] Chung N.T. (2008), Multiple solutions for quasilinear elliptic problems with nonlinear boundary conditions, *Electron. J. Diff. Equ.*, **2008** (165), 1-6.

[8] Chung N.T., Ngo Q.A. (2010), "Multiple solutions for a class of quasilinear elliptic equations of $p(x)$- Laplacian type with nonlinear boundary conditions", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **140**, 259-272.

[9] Chung N.T. (2009), "Multiple solutions for semilinear elliptic problems with Hardy-type and sign-changing potentials", *Int. Journal of Math. Analysis*, **03** (16), 787-793.

[10] Toan H.Q., Chung N.T. (2009), "On some semilinear elliptic problems with singular potentials involving symmetry", to appear in *Taiwanese Journal of Mathematics*.