ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÀO PHƯƠNG BẮC

SỐ HỌC, HÌNH HỌC CỦA NHÓM ĐẠI SỐ VÀ CÁC KHÔNG GIAN THUẦN NHẤT LIÊN QUAN TRÊN TRƯỜNG SỐ HỌC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số : 62.46.05.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2010

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội.

Người hướng dẫn khoa học: **PGS. TS. Nguyễn Quốc Thắng**

Phản biện: **GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp**

Phản biện: **PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang**

Phản biện: **TS. Lê Minh Hà**

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp nhà nước chấm luận án Tiến sĩ họp tại . . . .

vào hồi . . . . . giờ . . . . . ngày . . . . . tháng . . . . . năm . . . . .

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội

Danh mục công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. N. Q. Thắng, Đ. P. Bắc (2005), "Some rationality properties of observable groups and related questions", *Illinois J. Math.* **49** (2), pp. 431-444.

2. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2008), "Relative versions of theorems of Bogomolov and Sukhanov over perfect fields", *Proc. Japan Acad.*, **84**, Ser. A, No. 7, pp. 101-106.

3. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2009), *"On the topology of group cohomology of algebraic groups over local fields"*, Proceedings of 4th International Conference on Research and Education in Mathematics, ISBN 978-967-344-092-4, pp. 524-531.

4. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng (2010), "On a relative version of a theorem of Bogomolov over perfect fields and its applications", *J. Algebra* **324** (2010)-doi:10.1016/j.jalgebra.2010.04.020, 20 pp.

5. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng, "On the topology of relative orbits for action of algebraic tori over local fields", Preprint, 8pp.

6. Đ. P. Bắc, N. Q. Thắng, "On the topology on group cohomology and the topology of relative orbits for action of algebraic groups over local fields", Preprint, 49 pp.

7. Đ. P. Bắc, "On some topological properties of relative orbits of subsets", Preprint, 25 pp.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại:

- Hội nghị Quốc tế Osaka-Hanoi, Hà Nội (2005).

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Thành phố Hồ Chí Minh (2005).

- Hội nghị Khoa học kỷ niệm 50 năm thành lập Khoa Toán-Cơ-Tin học, Hà Nội (2006).

- Hội nghị Đại số-Hình học-Tôpô, Vinh (2007).

- Hội nghị Toán học Toàn quốc, Quy Nhơn (2008).

- Seminar của Phòng Lý thuyết số, Viện Toán học.

- Seminar của Phòng Đại số, Viện Toán học.

- Seminar của Bộ môn Đại số-Hình học-Tô pô, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội.

Mở đầu

Giả sử G là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên một trường k. Ta có thể hiểu đơn giản G là một nhóm các ma trận vuông cấp n với hệ số nằm trong bao đóng đại số của trường k và G đồng thời là tập không điểm của một họ các đa thức n^2 biến với hệ số trong k. Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng nằm giữa Lý thuyết nhóm đại số tuyến tính và Hình học Đại số là Lý thuyết bất biến hình học. Một phần chủ yếu của lý thuyết này nghiên cứu các tác động (cấu xạ) của một nhóm đại số tuyến tính lên một đa tạp đại số cho trước, đặc biệt là nghiên cứu tính chất của các quỹ đạo. Lý thuyết bất biến hình học xuất hiện từ lâu với việc nghiên cứu Bài toán số 14 của Hilbert về tính chất hữu hạn sinh của đại số các hàm bất biến. Với những đóng góp của Mumford, Haboush, Nagata, ..., lý thuyết này khá phong phú trong trường hợp trường k là đóng đại số. Tuy nhiên, ngay từ thời điểm ban đầu của Lý thuyết bất biến hình học hiện đại, mà Mumford là người đặt nền móng, ông đã đặt vấn đề nghiên cứu nó cả trong những tình huống tương đối, tức là khi k là một trường bất kỳ nói chung không đóng đại số. Chẳng hạn, với động cơ nghiên cứu các bài toán số học (cụ thể là xây dựng không gian moduli của các đa tạp abel), Mumford (1965) đã xét nhiều vấn đề của lý thuyết này trên những lược đồ đủ tổng quát. Ngoài ra, Borel (1969) và Tits (1965), ... đã đặt ra một số câu hỏi (hay giả thuyết) khi mở rộng các kết quả đã biết của lý thuyết bất biến hình học trên trường đóng đại số cho cả trường không đóng đại số (chẳng hạn mở rộng một định lý nổi tiếng của Hilbert và Mumford). Những kết quả điển hình theo hướng này thuộc về Birkes (1971), Kempf (1978), Raghunathan (1974), ... đã cho câu trả lời (hoặc lời giải) của một số câu hỏi (hoặc giả thuyết) được đề cập ở trên. Những nghiên cứu theo cách như vậy nói chung được gọi là nghiên cứu về các tính chất hữu tỷ (của nhóm đại số, của đa tạp đại số, v.v...). Khó khăn gặp phải trong các bài toán nói trên tương tự như đối với một bài toán số học, ví dụ việc tìm nghiệm của đa thức trong trường đóng đại số ("bài toán hình học") và trong trường không đóng đại số ("bài toán số học").

Để hiểu rõ các tính chất của quỹ đạo, việc nghiên cứu các nhóm con dừng là rất quan trọng. Có một số lớp nhóm con quan trọng trong việc nghiên cứu Lý thuyết bất biến hình học, đó là lớp các nhóm con quan sát được, lớp các nhóm con toàn cấu, và lớp các nhóm con Grosshans. Từ một số nghiên cứu về Lý thuyết biểu diễn nhóm đại số, Bialynicki-Birula, Hochschild, Mostow (1963) đã đưa ra khái niệm các *nhóm con quan sát được*. Ta có thể hiểu một nhóm con đóng H của G là quan sát được nếu H là nhóm con dừng của một vectơ v trong một G-môđun hữu tỷ hữu hạn chiều V nào đó. Các tác giả này đã đưa ra một số điều kiện cần và đủ để một nhóm là quan sát được. Sau đó, Grosshans (1973, 1997) đã tìm thêm được một số điều kiện tương đương khác. Tuy nhiên, hầu hết các kết quả ở đây đều mới chỉ được chứng minh cho trường hợp k là một trường đóng đại số.

Một lớp các nhóm con khác cũng khá quan trọng là lớp các *nhóm con toàn cầu* do Borel và Bien đưa ra (trước đó Bergman đã làm một công việc tương tự đối với các Đại số Lie). Ta định nghĩa một nhóm con đóng H của G là toàn cầu nếu đại số các hàm chính quy $k[G/H]$ của không gian thuần nhất G/H chính bằng k. Những điều kiện cần và đủ để một nhóm con đóng là toàn cầu ban đầu được đưa ra bởi Bien và Borel (1992). Bên cạnh đó, Bien, Borel, Kollar (1996) cũng nghiên cứu mối liên hệ của tính chất H là nhóm con toàn cầu với tính chất liên thông hữu tỷ của không gian thuần nhất G/H. Nhờ vào những nghiên cứu liên quan đến Bài toán số 14 của Hilbert, Grosshans (1973) đã đưa ra một lớp các nhóm con quan sát được mang tên ông. Đó là những nhóm con quan sát được H của G có tính chất đại số các hàm bất biến $k[G]^H$ là hữu hạn sinh, trong đó H tác động tịnh tiến phải lên đại số các hàm chính quy $k[G]$. Chính Grosshans cũng tìm ra một số điều kiện cần và đủ khá thú vị cho khái niệm nói trên. Tuy nhiên, các kết quả nói trên mới chỉ được chứng minh trong trường hợp k là trường đóng đại số.

Gần đây, vì sự cần thiết phải có những ứng dụng trong Số học và Lý thuyết ergodic, Weiss (1998) cũng có một số kết quả về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được và những nhóm con toàn cầu. Như ta đã biết, một nhóm con đóng H của G là quan sát được nếu $H = G_v$, với $v \in V$, V là một G-môđun hữu hạn chiều. Tuy nhiên, H chỉ là nhóm con dừng của một vectơ (đối với biểu diễn đã cho), và ta khó có thể nói gì thêm về cấu trúc của H. Ở đây, Sukhanov (1990) đã có kết quả đi sâu hơn khẳng định nói trên. Ông đã chứng minh một định lý nói rằng, một nhóm con là quan sát được nếu và chỉ nếu nó là dưới parabolic. Để làm được điều này, Sukhanov phải dùng một kết quả quan trọng của Bogomolov về cấu trúc của nhóm con dừng của một vectơ thiếu ổn định (instable) v (nghĩa là $0 \in \overline{G \cdot v}$). Tuy nhiên, các kết quả trên của Bogomolov và Sukhanov cũng mới chỉ được chứng minh trong trường hợp k là trường đóng đại số. Nội dung của hai chương đầu tiên nói về kết quả của luận án (Chương 2, và Chương 3) là trình bày việc mở rộng những khẳng định này cho trường không đóng đại số. Vì một số lý do kỹ thuật, các kết quả của Bogomolov và Sukhanov trong Chương 3 chỉ được mở rộng lên cho trường hợp k là trường hoàn thiện.

Như đã nói ở trên, có rất nhiều kết quả của Lý thuyết bất biến (hình học) đề cập đến việc nghiên cứu tính chất đóng của quỹ đạo dưới tác động của nhóm G thu được trong trường hợp hình học, tức là, trong trường hợp trường k là đóng đại số. Bên cạnh đó, vì một số đòi hỏi nội tại của Lý thuyết số mà các trường địa phương, toàn cục được quan tâm đặc biệt. Chẳng hạn ta cho G là một nhóm đại số tuyến tính tác động lên k-đa tạp V và $x \in V(k)$. Khi đó một bước chính trong việc chứng minh một kết quả tương tự của Định lý siêu cứng (super-rigidity) Margulis trong trường hợp trường hàm toàn cục, được đưa ra bởi Venkataramana (1988), là chứng minh tính chất đóng (địa phương) của một số quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot x$. Vì thế, chúng tôi quan tâm đến mối liên hệ giữa các tính chất đóng Zariski của các quỹ đạo dưới tác động bởi một nhóm đại số và tính chất đóng Hausdorff của các quỹ đạo tương đối. Cụ thể hơn, giả sử k là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường v có hạng thực bằng 1, ví dụ là các trường địa phương như trường $\mathfrak{p}$-adic hoặc trường số thực $\mathbb{R}$. Ta trang bị cho $X(k)$ tôpô v-adic Hausdorff, cảm sinh từ tôpô v-adic trên k. Cho $x \in X(k)$, chúng tôi muốn nghiên cứu mối liên hệ giữa tính chất đóng Zariski của quỹ đạo hình học $G \cdot x$ trong X và tính chất đóng Hausdorff của quỹ đạo (tương đối) $G(k) \cdot x$ trong $X(k)$. Kết quả đầu tiên theo hướng này thuộc về Borel và Harish-Chandra (1963), tiếp đến là Birkes (1971) trong trường hợp trường số thực, và sau đó là Bremigan (1994). Thực tế, ở các bài báo đó đã chỉ ra nếu G là một $\mathbb{R}$-nhóm reductive, thì $G \cdot x$ là đóng Zariski nếu và chỉ nếu $G(\mathbb{R}) \cdot x$ là đóng theo tôpô thực. Điều này cũng được mở rộng cho trường $\mathfrak{p}$-adic bởi Bremigan (1994). Mục đích của chúng tôi trong chương kết quả thứ ba (Chương 4) là mở rộng và nghiên cứu sâu hơn bài toán được đề cập ở trên.

Bản luận án gồm 4 chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản, cần thiết cho luận án. Cụ thể là, trong Mục 1.1, 1.2, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về nhóm đại số tuyến tính, Lý thuyết bất biến hình học (nói rõ hơn, tác động của nhóm đại số lên đa tạp) và lược đồ nhóm affine. Trong Mục 1.3, 1.4, chúng tôi trình bày một số kiến thức cần thiết về đối đồng điều Galois và đối đồng điều phẳng, và trong Mục 1.5, chúng tôi trình bày một số định nghĩa, kết quả đã biết về tôpô trên tập đối đồng điều.

Các kết quả mới được chúng tôi trình bày trong các Chương 2, 3, và 4. Chương 2 (tương ứng, Chương 3, Chương 4) chúng tôi viết dựa theo các bài báo [1](tương ứng, ([2], [4]) và ([5], [6])). Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu một số tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cấu, và nhóm con Grosshans. Ở đó, chúng tôi chỉ ra rằng một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con là quan sát được và một nhóm con là toàn cấu đều có thể mở rộng được cho trường k bất kỳ, không nhất thiết là đóng đại số. Nói riêng ra, các điều kiện cần và đủ để một nhóm là quan sát được bao gồm tính chất nhóm con dừng trên k, tính chất mở rộng được trên k, tính chất tựa affine trên k, ..., đều mở rộng được cho trường k tùy ý. Phát biểu chính xác của kết quả này được cho trong Định lý 2.1.11. Tương tự như các nhóm con quan sát được, Bien và Borel (1992) cũng chứng minh một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con là toàn cấu. Định lý chính thứ hai của Chương 2 khẳng định rằng, những tiêu chuẩn cần và đủ như đại số các hàm chính quy của đa tạp thương chỉ gồm những hàm hằng hoặc đại số các hàm chính quy của đa tạp thương là không gian vectơ hữu hạn chiều trên k, ... đều có thể mở rộng cho một trường k tùy ý (xem Định lý 2.2.4). Dựa vào các kết quả trên chúng tôi thu được kết quả về tính chất hữu tỷ cho các nhóm con Grosshans. Định lý này nói rằng tính chất hữu hạn sinh của $k[G]^H$ là tương đương với tính chất đối chiều 2 (trên k) của nhóm con đóng H và tính chất $k[G]^{H(k)}$ là hữu hạn sinh trong trường hợp trường k là hoàn thiện gồm vô hạn phần tử (xem Định lý 2.3.5).

Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu việc mở rộng các Định lý Bogomolov và Định lý Sukhanov cho trường không đóng đại số. Như đã biết, theo Bogomolov, một nhóm con dừng $H := G_v$ của một vectơ thiếu ổn định $v \in V$ đều chứa trong một nhóm con tựa parabolic Q nào đó, nghĩa là tồn tại một G-môđun bất khả quy W và một vectơ trọng cao nhất $w \in W$ sao cho $H \subseteq G_w$. Dùng kết quả này, Sukhanov đã chỉ ra một nhóm con đóng H của G là một nhóm con quan sát được nếu và chỉ nếu H là một nhóm con dưới parabolic của G, nghĩa là tồn tại Q là một nhóm con tựa parabolic của G sao cho $H^0 \subseteq Q$ và $R_u(H) \subseteq R_u(Q)$ (trong đó, H^0 là thành phần liên thông của H, và $R_u(G)$ là căn lũy đơn của G). Hai kết quả chính của chương này là các Định lý 3.1.5, và Định lý 3.1.7. Nói riêng ra, chúng tôi đã mở rộng được các kết quả của Bogomolov và Sukhanov cho trường hoàn thiện bất kỳ, và chứng minh một kết quả cho mối liên hệ giữa các nhóm con quan sát được, nhóm con tựa parabolic, k-tựa parabolic, k-dưới parabolic, ... (Xem Định lý 3.1.7.)

Trong Chương 4, chúng tôi nghiên cứu câu hỏi về liên hệ giữa tôpô Zariski của quỹ đạo hình học $G \cdot v$ và tôpô Hausdorff của quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot v$. Chúng tôi có hai định lý chính tương ứng với trường k là hoàn thiện (xem Định lý 4.2.6) và trường k không nhất thiết hoàn thiện (xem Định lý 4.3.1.3). Ngoài ra, chúng tôi cũng có các ví dụ, phản ví dụ để bổ sung cho những định lý nói trên. (Xem thêm các Mệnh đề 4.2.8, 4.4.1, và 4.4.2.) Chẳng hạn, chúng tôi khẳng định rằng, nếu k là một trường đầy đủ, hoàn thiện thì điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng (theo tôpô Hausdorff) kéo theo $G \cdot v$ đóng (theo tôpô Zariski) trong trường hợp $G = L \times U$ là tích trực tiếp của một nhóm reductive L và một nhóm lũy đơn U (một phần của Định lý 4.2.6) và nếu G không là tích trực tiếp $L \times U$ thì khẳng định trên nói chung là sai (Mệnh đề 4.2.8). Đối với k là trường đầy đủ bất kỳ, một phần của Định lý 4.3.1.3 khẳng định rằng điều kiện $G \cdot v$ là đóng Zariski kéo theo điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng Hausdorff đúng trong trường hợp nhóm dừng G_v là giao hoán và trơn. Đảo lại, nếu G là reductive và tác động là tách mạnh tại v (theo nghĩa của Ramanan và Ramanathan) thì điều kiện $G(k) \cdot v$ đóng Hausdorff cũng kéo theo $G \cdot v$ là đóng Zariski. Tuy nhiên, nếu tác động không còn là tách mạnh thì chúng tôi chỉ ra ví dụ nói rằng khẳng định trên là sai (Mệnh đề 4.4.2).

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho toàn bộ luận án. Ở đây, chúng tôi chỉ xét những nhóm đại số affine (tuyến tính) và lược đồ nhóm đại số affine.

Trong Mục 1.1, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản về nhóm đại số tuyến tính trên một trường. Cụ thể là các định lý nhúng một nhóm đại số tuyến tính vào nhóm tuyến tính tổng quát GL_n, phân tích Jordan trong một nhóm đại số tuyến tính, định nghĩa và một số tính chất của nhóm reductive, nhóm nửa đơn, nhóm lũy đơn, xuyến, ... Sau đó, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản của lý thuyết bất biến hình học như: tác động của nhóm đại số tuyến tính lên đa tạp, thương hình học, thương phạm trù của một đa tạp theo tác động của một nhóm đại số.

Trong Mục 1.2, chúng tôi trình bày ngắn gọn về lý thuyết lược đồ nhóm affine. Chúng tôi điểm qua một số khái niệm cơ bản về lược đồ nhóm affine, lược đồ nhóm lũy đơn, lược đồ nhóm hữu hạn, étale, ..., các định lý cấu trúc của lược đồ nhóm lũy đơn trên một trường.

Trong Mục 1.3, chúng tôi trình bày về đối đồng điều Galois không giao hoán của một nhóm đại số tuyến tính: định nghĩa tập đối đồng điều bậc 1, phép xoắn của các đối xích, các định lý về dãy khớp của tập đối đồng điều liên kết với dãy khớp của nhóm đại số, ...

Trong Mục 1.4, chúng tôi trình bày vài nét về đối đồng điều phẳng của lược đồ nhóm trên trường: định nghĩa đối đồng điều phẳng bậc 1, liên hệ giữa đối đồng điều Galois với đối đồng điều phẳng, ...

Trong Mục 1.5, chúng tôi trình bày việc trang bị tôpô trên tập đối đồng điều Galois (hoặc đối đồng điều phẳng). Hai tôpô quan trọng được trình bày ở đây là tôpô chính tắc và tôpô đặc biệt.

Chương 2

Một số tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được và nhóm con Grosshans

Trong chương này, chúng tôi tiếp tục những nghiên cứu về các nhóm con quan sát được. Cụ thể hơn, chúng tôi quan tâm một số câu hỏi về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cầu, và nhóm con Grosshans. Những kết quả ban đầu về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được (tương ứng nhóm con toàn cầu) thu được bởi Bialynicki-Birula, Hochschild, Mostow (1963), và sau đó bởi Grosshans (1973, 1997) và Weiss (1998) (tương ứng bởi Weiss (1998), F. Bien và A. Borel (1992). Hơn nữa, cũng trong bài báo của Weiss (1998), một số ứng dụng về tác động ergodic cũng được nghiên cứu. Ở đây, chúng tôi chứng minh một số kết quả mới về tính chất hữu tỷ của các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cầu, nhóm con Grosshans mà ban đầu chỉ được chứng minh trong trường hợp k là trường đóng đại số. Kết quả chính của chương này là các Định lý 2.1.11, 2.2.4, 2.3.5.

2.1 Các tính chất hữu tỷ của nhóm con quan sát được

Cho k là một trường tùy ý, $\bar{k}$ là bao đóng đại số của k. Cho H là một k-nhóm con đóng của một k-nhóm G. Khi đó, G tác động lên đại số các hàm chính quy $\bar{k}[G]$ của nó thông qua phép tịnh tiến phải $r_g(f)(x) = f(xg)$, với $g, x \in G$. Ta ký hiệu $H' = \bar{k}[G]^H := \{f \in \bar{k}[G] \mid r_h(f) = f, \forall h \in H\}$. Với R là một $\bar{k}$-đại số con của $\bar{k}[G]$, ta đặt $R' = \{g \in G \mid r_g(f) = f, \forall f \in R\}$. Định nghĩa sau đây được đưa ra bởi Bialynicki-Birula, Hochschild, và Mostow (1963).

Định nghĩa. Ta nói nhóm con đóng H của G là một *nhóm con quan sát được* (trên $\bar{k}$) nếu $H'' = (\bar{k}[G]^H)' = H$.

Chúng ta đã biết một số tiêu chuẩn cần và đủ về các nhóm con quan sát được trong trường hợp k là trường đóng đại số. Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả là mở rộng của những tiêu chuẩn cần và đủ này cho trường hợp k là trường bất kỳ.

Định nghĩa 2.1.6 ([1])**.** Ta nói H là *quan sát được tương đối trên k* nếu $H = (k[G]^{H(k)})'$, và H là *k-quan sát được* nếu $(k[G]^H)' = H$.

Dựa trên khẳng định không gian thuần nhất G/H, và cấu xạ thương $\pi : G \to G/H$ đều là xác định trên k, chúng ta có được kết luận sau.

Mệnh đề 2.1.7 ([1])**.** *Cho k là một trường tùy ý, và H là một k-nhóm con đóng của một k-nhóm G. Khi đó:*

(a) $H' = \bar{k}[G]^H = \bar{k} \otimes_k k[G]^H$.

(b) *H là quan sát được nếu và chỉ nếu H là k-quan sát được.*

(c) *Giả sử $H(k)$ là trù mật Zariski trong H. Khi đó, một trong hai điều kiện tương đương ở* (b) *là tương đương với điều kiện H là quan sát được tương đối trên k.*

Từ đó chúng ta thu được kết quả sau đây là một chi tiết quan trọng trong chứng minh Định lý chính 2.1.11.

Mệnh đề 2.1.10 ([1])**.** *Cho G là một k-nhóm, H là một k-nhóm con đóng của G. Giả sử tồn tại một k-biểu diễn hữu hạn chiều $\rho : G \to GL(V)$ và $v \in V(k)$ sao cho $H = G_v$. Khi đó tồn tại một biểu diễn hữu tỷ hữu hạn chiều $\rho' : G \to GL(W)$ xác định trên k, $w \in W(k)$, sao cho $H = G_w$ và $G/H \overset{k}{\cong} G \cdot w$.*

Nhận xét. Nhìn chung chúng ta chỉ có một cấu xạ song ánh giữa không gian thuần nhất G/H và không gian quỹ đạo $G \cdot v$. Trong trường hợp trường k là đóng đại số, chúng ta phải lấy chuẩn tắc hóa của đa tạp $X := \overline{G \cdot v}$ trong trường hàm $k(G/H)$ và sử dụng Định lý chính của Zariski. Trong trường hợp k là trường tùy ý, việc lặp lại chứng minh trên không thật đơn giản vì nhìn chung khó rút ra kết luận về tính chất đẳng cấu trên k. Vì thế, chúng ta chọn cách dựa trên kết quả đã có trong trường hợp trường k là đóng đại số và Mệnh đề 2.1.7.

Từ những kết quả được chứng minh ở trên, chúng ta có định lý sau cho một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con đóng là nhóm con quan sát được trên trường bất kỳ.

Định lý 2.1.11 ([1])**.** *Cho G là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên một trường k tùy ý và H là một k-nhóm con đóng của G. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) *H là quan sát được, tức là, $H = H''$.*

(a') *H là k-quan sát được, tức là, $H = (k[G]^H)'$.*

(b') *Tồn tại một biểu diễn k-hữu tỷ $\rho : G \to GL(V)$ và một véctơ $v \in V(k)$ sao cho*

$$H = G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}.$$

(c') *Tồn tại một số hữu hạn các hàm $f \in k[G/H]$ tách các điểm của G/H.*

(d') *Không gian thuần nhất G/H là một đa tạp tựa affine xác định trên k.*

(e') *Mọi biểu diễn k-hữu tỷ $\rho : H \to GL(V)$ đều mở rộng được thành một biểu diễn k-hữu tỷ $\rho' : G \to GL(V')$.*

(f') *Tồn tại một biểu diễn k-hữu tỷ $\rho : G \to GL(V)$ và một véctơ $v \in V(k)$ sao cho $H = G_v$ và*

$$G/H \overset{k}{\cong} G \cdot v = \{\rho(g)(v) \mid g \in G\}.$$

(g') *Trường các thương của vành các $G^0 \cap H$-bất biến trong $k[G^0]$ bằng trường các phân thức $G^0 \cap H$-bất biến của $k(G^0)$.*

Hơn nữa, nếu $H(k)$ trù mật Zariski trong H thì các khẳng định trên tương đương với tính chất quan sát được tương đối của H trên k.

2.2 Các tính chất hữu tỷ của nhóm con toàn cấu

Tương tự như các nhóm con quan sát được, có một số cách định nghĩa (tương đương với nhau) cho các nhóm con toàn cấu. Một trong các định nghĩa như vậy được đưa ra bởi Bien và Borel (1992).

Định nghĩa. Ta nói một nhóm con đóng H của G là *toàn cấu trên $\bar{k}$* nếu $(\bar{k}[G]^H)' = G$.

Trước khi trình bày một số tiêu chuẩn cần và đủ để một nhóm con đóng là toàn cấu, chúng tôi đưa ra một số định nghĩa cho các nhóm con toàn cấu trên k.

Định nghĩa 2.2.2 ([1])**.** Ta nói một k-nhóm H của k-nhóm G là *toàn cấu tương đối trên k* nếu $(H'_k)' = G$, và là *k-toàn cấu* nếu $(k[G]^H)' = G$.

Dùng Mệnh đề 2.1.7, chúng ta có kết quả sau cho những tiêu chuẩn về nhóm con toàn cấu trên trường bất kỳ.

Định lý 2.2.4 ([1])**.** *Cho k là một trường bất kỳ và H là một k-nhóm con đóng của một k-nhóm G. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(a') *H là k-toàn cấu, tức là $(k[G]^H)' = G$.*

(b') $k[G/H] = k$.

(c') *$k[G/H]$ là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên k.*

(d') *Với bất kỳ G-môđun hữu tỷ V xác định trên k, không gian con của V bao gồm các điểm bất động của G và H là trùng nhau.*

(e') *Giả sử V là một G-môđun hữu tỷ xác định trên k, và $V = X \oplus Y$, trong đó X, Y là H-bất biến. Khi đó X, Y cũng là G-bất biến.*

(f') *Mọi k-cấu xạ từ k-nhóm đại số G đến một k-nhóm đại số L đều được xác định bởi giá trị của nó trên H.*

2.3 Các tính chất hữu tỷ của nhóm con Grosshans

Kết quả sau đây của Grosshans (1973) cho điều kiện cần và đủ để vành hàm bất biến $k[G]^H$ là hữu hạn sinh.

Định lý 2.3.2 (Grosshans). *Giả sử H là một nhóm con quan sát được của nhóm đại số tuyến tính G, tất cả đều xác định trên trường đóng đại số k. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) *Tồn tại một biểu diễn hữu tỷ hữu hạn chiều $\varphi : G \to GL(V)$ và một véctơ $v \in V$ sao cho $H = G_v$ và mọi thành phần bất khả quy của $\overline{G \cdot v} - G \cdot v$ đều có đối chiều ≥ 2 trong $\overline{G \cdot v}$.*

(b) *k-đại số $k[G]^H$ là hữu hạn sinh.*

Nếu (b) *đúng, ta chọn X là đa tạp affine sao cho $k[X] = k[G]^H$ và tác động của G lên X được cho thông qua phép tịnh tiến trái của G lên G/H. Khi đó tồn tại điểm $x \in X$ sao cho $G \cdot x$ là mở trong X, $G \cdot x \cong G/H$ thông qua cấu xạ $gH \mapsto g \cdot x$ và mỗi thành phần bất khả quy của $X \setminus G \cdot x$ có đối chiều ≥ 2 trong X.*

Định nghĩa 2.3.3 (Grosshans). Các nhóm con quan sát được thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương của Định lý 2.3.2 được gọi là các *nhóm con Grosshans*.

Ta có định nghĩa sau về dạng tương đối của lớp nhóm con này.

Định nghĩa 2.3.4 ([1]). (a) Cho k là một trường tùy ý, G là một k-nhóm. Ta nói một k-nhóm con quan sát được H của G là nhóm con thỏa mãn điều kiện *đối chiều* 2 trên k nếu H thỏa mãn (a) trong Định lý 2.3.2, trong đó V, φ là xác định trên k và $v \in V(k)$.

(b) Ta nói H là một nhóm con *Grosshans tương đối trên k* (tương ứng, nhóm con *k-Grosshans*) của G nếu $k[G]^{H(k)}$ (tương ứng, $k[G]^H$) là một k-đại số hữu hạn sinh.

Chúng ta có kết quả sau (là mở rộng của Định lý 2.3.2) cho các nhóm con k-Grosshans trên trường không đóng đại số.

Định lý 2.3.5 ([1]). *Cho k là một trường hoàn thiện với vô hạn phần tử và G là một k-nhóm. Giả sử rằng H là một k-nhóm con quan sát được của G. Ta xét các điều kiện sau:*

(a') *H thỏa mãn điều kiện đối chiều 2 trên k.*

(b') *Một trong các k-đại số $k[G]^H$, $k[G]^{H^0}$, $k[G^0]^{H\cap G^0}$, $k[G^0]^{H^0}$ là k-đại số hữu hạn sinh.*

(c') *H là một nhóm con Grosshans tương đối trên k (tức là, $k[G]^{H(k)}$ là một k-đại số hữu hạn sinh).*

Khi đó cùng với các điều kiện của Định lý 2.3.2 ta có

$$(a) \Leftrightarrow (a') \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (b') \Rightarrow (c').$$

Nếu hơn nữa, $H(k)$ là trù mật Zariski trong H thì tất cả các khẳng định trên là tương đương.

Nhận xét. Một ví dụ mà trong đó (c') hãy còn đúng nhưng các điều kiện còn lại không đúng là có ý nghĩa. Thật vậy, để có được ví dụ như vậy, ta phải tìm những nhóm G và H sao cho $k[G]^H$ là vô hạn sinh và $H(k)$ không trù mật Zariski trong H. Mặt khác, một nhóm đại số liên thông H xác định trên trường đặc số 0 luôn có tính chất $H(k)$ trù mật trong H. Do đó, điều này có thể dẫn đến việc tìm phản ví dụ cho bài toán thứ 14 của Hilbert trong trường hợp đặc số p. Những kết quả mở rộng cho Lý thuyết bất biến hình học trong trường hợp đặc số p có thể tìm trong Mumford et al (1994). Nếu chỉ ra được phản ví dụ cho trường hợp G, H liên thông thì kết quả sẽ thú vị hơn.

Chương 3

Về một dạng tương đối cho định lý của Bogomolov trên trường hoàn thiện và ứng dụng của nó

Trong chương này, chúng tôi thu được hai kết quả mới về hai lớp nhóm con quan trọng là nhóm con quan sát được và nhóm con tựa parabolic của nhóm đại số tuyến tính. Cụ thể là, chúng tôi thu được một dạng tương đối cho một Định lý quan trọng của Bogomolov, và áp dụng chúng để thu được một dạng tương đối cho Định lý của Sukhanov. Những kết quả này liên quan chặt chẽ với lý thuyết về tính thiếu ổn định (instability) của Kempf (1978) và Rousseau (1978), và một dạng mịn hơn của nó thuộc về Ramanan và Ramanathan (1984). Sau đó, những kết quả này đã được mở rộng bởi Coiai và Holla (2006). Trong Mục 3.1, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị chung và phát biểu của những định lý chính. Trong Mục 3.2, chúng tôi nhắc lại một số kết quả cơ bản của lý thuyết biểu diễn nhóm reductive và chứng minh một số kết quả sơ bộ. Trong Mục 3.3, chúng tôi đưa ra chứng minh một dạng tương đối cho một kết quả của Bogomolov (Định lý 3.1.5). Sau đó, chúng tôi chứng minh Định lý của Sukhanov cho trường hoàn thiện (Định lý 3.1.7) ở Mục 3.4.

3.1 Một số khái niệm và kết quả chính

Ta bắt đầu bằng một số định nghĩa.

Định nghĩa 3.1.1 (Hilber-Mumford)**.** a) Một vectơ $v \in V \setminus \{0\}$ được gọi là *thiếu ổn định* (unstable, instable) đối với tác động của G nếu $0 \in \overline{G \cdot v}$.
b) Ta nói vectơ $v \in V \setminus \{0\}$ là *nửa ổn định* (semi-stable) đối với tác động của nhóm G nếu $0 \notin \overline{G \cdot v}$.
c) Ta nói vectơ $v \in V \setminus \{0\}$ là *ổn định* (stable) đối với tác động của nhóm G nếu quỹ đạo $G \cdot v$ là đóng.

Cho G là một nhóm đại số tuyến tính (không nhất thiết liên thông, cũng như reductive) và V là một G^0-môđun bất khả quy. Khi đó $G^0/R_u(G)$ là nhóm reductive và $R_u(G)$ tác động tầm thường lên V. Vậy theo Grosshans (1997), ta có định nghĩa vectơ trọng cao nhất ứng với biểu diễn bất khả quy của một nhóm đại số tuyến tính bất kỳ.

Định nghĩa 3.1.2. Ta nói $v \in V$ là một vectơ trọng cao nhất của biểu diễn nói trên, nếu khi xem V như một $G^0/R_u(G)$-môđun bất khả quy thì $v \in V$ là vectơ trọng cao nhất.

Từ đó chúng ta có những định nghĩa sau.

Định nghĩa 3.1.3 ([2,4])**.** Giả sử G là một nhóm đại số tuyến tính.

a) Cho Q là một nhóm con đóng của G^0. Khi đó, ta nói Q là một nhóm con *k-tựa parabolic* của G nếu $Q = (G^0)_v$, với $v \in V(k)$ là một vectơ trọng cao nhất của một $k - G^0$-môđun V bất khả quy nào đó.

b) Ta định nghĩa một nhóm con đóng H của G là *k-dưới parabolic* (subparabolic) nếu H là xác định trên k, và tồn tại một nhóm con k-tựa parabolic Q của G^0, sao cho $H^0 \subseteq Q$ và $R_u(H) \subseteq R_u(Q)$.

a') Ta định nghĩa nhóm con Q của G^0 là *tựa parabolic trên k* (hoặc k-nhóm con tựa parabolic) nếu nó là tựa parabolic và xác định trên k.

b') Ta nói nhóm con H của G là *dưới parabolic trên k* (hoặc k-nhóm con dưới parabolic) nếu nó xác định trên k và là dưới parabolic. Một k-nhóm con đóng H của G được gọi là *dưới parabolic mạnh trên k* (strongly subparabolic over k) nếu tồn tại một k-nhóm con tựa parabolic Q của G^0 sao cho $H^0 \subseteq Q$ và $R_u(H) \subseteq R_u(Q)$.

Chúng tôi lưu ý là trong chương này, một nhóm con đóng Q của G được gọi là tựa parabolic nếu nó là $\bar{k}$-tựa parabolic và một nhóm con đóng Q của G là dưới parabolic nếu nó là $\bar{k}$-dưới parabolic. Vì thế, ta thu lại được những khái niệm thông thường về những nhóm con nói trên và chúng đã được đưa ra ở Grosshans (1997). Hơn nữa, rõ ràng tính chất dưới parabolic mạnh trên k là chặt hơn tính chất dưới parabolic trên k.

Kết quả chính đầu tiên của chương này là Định lý 3.1.5 cho liên hệ giữa nhóm dừng của một vectơ thiếu ổn định $v \in V(k)$ với các nhóm con k-tựa parabolic trong trường hợp k là một trường hoàn thiện bất kỳ.

Định lý 3.1.5 ([2,4])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, G là một k-nhóm reductive liên thông, V là một $k - G$-môđun hữu hạn chiều, và $v \in V(k) \setminus \{0\}$. Khi đó, nếu v là một vectơ thiếu ổn định đối với tác động của G (tức là $0 \in \overline{G \cdot v}$), thì G_v chứa trong một nhóm con k-tựa parabolic thực sự Q của G.*

Bằng cách áp dụng Định lý 3.1.5 và một số kết quả khác, chúng tôi thu được kết quả chính thứ hai về tính chất hữu tỷ cho những nhóm con tựa parabolic, dưới parabolic và quan sát được của một nhóm đại số tuyến tính G xác định trên một trường hoàn thiện k.

Định lý 3.1.7 ([2,4])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, G là một nhóm đại số tuyến tính xác định trên k và H là một k-nhóm con đóng của G. Ta xét những khẳng định sau.*

1) *H là k-tựa parabolic.*

2) *H là tựa parabolic trên k.*

3) *H là quan sát được trên k.*

4) *H là k-dưới parabolic.*

5) *H là dưới parabolic mạnh trên k.*

6) *H là dưới parabolic trên k.*

Thế thì 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5) $\Leftrightarrow$ 6)*. Nếu G là một nhóm nửa đơn thì* 1) $\Leftrightarrow$ 2)*. Nói chung,* 2) *không suy ra* 1)*.*

3.3 Dạng tương đối cho một định lý của Bogomolov

Trong Mục 3.3.1, chúng tôi đưa ra cách chứng minh thứ nhất cho Định lý 3.1.5. Đầu tiên, chúng tôi phát biểu Bổ đề 3.3.1.1 và từ đó rút ra $\chi \in X^*(T)$ luôn mở rộng được lên cho nhóm con parabolic $P(\chi)$ (được cho trong Định nghĩa 3.2.4.2) tương ứng. Sau đó, chúng tôi phát biểu và chứng minh Bổ đề 3.3.1.2.

Bổ đề 3.3.1.2 ([2,4])**.** *Với $\chi \in \Lambda_+$ là một trọng trội ứng với nhóm con Borel B chứa T, ta giả sử $\tilde{\chi} \in X^*(P(\chi))$ là một đặc trưng của $P(\chi)$ sao cho $\tilde{\chi}|_T = \chi$. Cho $\rho : G \to GL(W)$ là biểu diễn bất khả quy tuyệt đối ứng với trọng trội χ và $w \in W$ là một vectơ trọng cao nhất ứng với χ. Khi đó $Ker\tilde{\chi} = G_w$.*

Nhờ các kết quả trên, chúng tôi có được chứng minh thứ nhất của Định lý 3.1.5. Trong Mục 3.3.2, chúng tôi trình bày chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5. Chúng tôi cần khẳng định sau.

Bổ đề 3.3.2.3 ([2,4])**.** *Giả sử rằng G là một nhóm reductive xác định trên một trường hoàn thiện k, T là một k-xuyến cực đại chứa trong một nhóm con Borel B của G. Cho $\pi : G \to GL(V) = {}_kGL_n$ là một $\bar{k}$-biểu diễn tuyệt đối bất khả quy ứng với trọng trội $\chi \in X^*(T)_k$. Giả sử tồn tại một vectơ $v \in V(k)(= k^n)$ ứng với trọng cao nhất χ và biểu diễn xạ ảnh tương ứng $\overline{\pi} : G \to PGL(V) = {}_kPGL_n(\bar{k})$ là xác định trên k. Thế thì π là xác định trên k và nói riêng ra, $H = G_v$ là nhóm con k-tựa parabolic.*

Từ khẳng định này và một số kết quả bổ trợ khác, chúng tôi có được cách thứ hai chứng minh Định lý 3.1.5. Cũng nhờ cách chứng minh này, chúng tôi thu được kết quả sau là mở rộng một định lý của Grosshans (1997) cho trường hoàn thiện.

Định lý 3.3.2.4 ([4])**.** *Cho G là một nhóm reductive xác định trên một trường hoàn thiện k, T là một k-xuyến cực đại, $\chi \in X^*(T)_k$. Thế thì tồn tại một k-biểu diễn bất khả quy tuyệt đối $G \to {}_kGL_n = GL(W)$ với trọng cao nhất χ, sao cho P_χ là nhóm con dừng của một vectơ trọng cao nhất $w \in W(k)$. Đảo lại, với bất kỳ một k-biểu diễn bất khả quy tuyệt đối $G \to {}_kGL_n = GL(W)$, nhóm con dừng của bất kỳ một vectơ trọng cao nhất $w \in W(k)$ (đối với nhóm con Borel B cho trước) đều có dạng P_χ, trong đó $\chi \in X^*(T)_k$ là một đặc trưng trội nào đó (ứng với B).*

3.4 Một số tính chất hữu tỷ của các nhóm con tựa parabolic và các nhóm con dưới parabolic

Mục đích của phần này là chứng minh Định lý 3.1.7 được nêu trong phần mở đầu chương. Kết quả đầu tiên dưới đây là phần then chốt trong chứng minh. Khẳng định này ứng với một trường hợp riêng của tương đương 3) $\Leftrightarrow$ 4) của Định lý 3.1.7, và trong trường hợp k là trường đóng đại số thì đó chính là một định lý của Grosshans (1997).

Mệnh đề 3.4.2 ([2,4])**.** *Cho G là một nhóm reductive xác định trên một trường hoàn thiện k, T là một k-xuyến cực đại của G và cho H là một k-nhóm con đóng của G chuẩn tắc bởi T. Khi đó, H là một nhóm con quan sát được của G nếu và chỉ nếu H là một nhóm con k-dưới parabolic trong một nhóm con tựa parabolic P_χ của G ($R_u(H) < R_u(P_\chi)$).*

Để chứng minh 2) $\Rightarrow$ 1) trong Định lý 3.1.7, chúng ta cần những khẳng định sau về tác động Galois lên các nhóm parabolic $P(\chi)$. Cho T là một k-xuyến con cực đại của k-nhóm G, $(.,.)$ là một tích vô hướng $W(T,G)$-bất biến trên $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ xác định trên k và $P(\chi)$, P_χ được cho như trong Định nghĩa 3.2.4.2. Khi đó ta có.

Bổ đề 3.4.6 ([2,4])**.**

a) ${}^\sigma Ker\chi = Ker({}^\sigma\chi)$, ${}^\sigma P_\chi = P_{{}^\sigma\chi}$, ${}^\sigma P(\chi) = P({}^\sigma\chi)$, *với mọi* $\sigma \in \Gamma = Gal(k_s/k)$.

b) $Ker\chi = T \cap P_\chi$.

Nhận xét. Bằng việc lập luận như trong chứng minh thứ hai của Định lý 3.1.5 (xem cả Định lý 3.3.2.4), ta thấy nếu T là một k-xuyến cực đại của một nhóm reductive G, $\chi \in X^*(T)_k$ là một k-đặc trưng của T thì P_χ là một nhóm con k-tựa parabolic của G. Cuối cùng, chúng tôi cần kết quả sau cho nhóm nửa đơn để chứng minh khẳng định 2) $\Rightarrow$ 1) trong Định lý 3.1.7.

Mệnh đề 3.4.7 ([2,4])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, G là một k-nhóm nửa đơn. Giả sử H là một nhóm con tựa parabolic của G xác định trên k. Khi đó, H là một nhóm con k-tựa parabolic của G, nghĩa là, tồn tại một k-biểu diễn bất khả quy tuyệt đối $\rho : G \to GL(V)$, một vectơ trọng cao nhất $v \in V(k)$ sao cho $H = G_v$ là nhóm con dừng ứng với v.*

Để chứng minh Mệnh đề 3.4.7, chúng ta cần các kết quả bổ trợ sau.

Bổ đề 3.4.8 ([2,4])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, G là một nhóm reductive và H là một nhóm con tựa parabolic xác định trên k. Khi đó, tồn tại một k-xuyến cực đại T của G và một đặc trưng $\chi \in X^*(T)$ sao cho $H = P_\chi = \langle Ker\chi, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi(T,G), (\alpha, \chi) \geq 0\rangle$.*

Bổ đề 3.4.9 ([2,4])**.** *Cho T là một k-xuyến cực đại của G, $\chi \in X^*(T)$ sao cho P_χ là xác định trên k. Thế thì $Ker\chi = Ker(^\sigma\chi)$ với mọi $\sigma \in \Gamma$.*

Bổ đề 3.4.10 ([2,4])**.** *Với những khái niệm như trong Bổ đề 3.4.9, nếu G nửa đơn, thì χ là xác định trên k.*

Chúng tôi trình bày hai cách chứng minh của bổ đề này. Từ các kết quả nói trên chúng ta thu được chứng minh của Định lý 3.1.7. Chúng ta cũng lưu ý rằng có những ví dụ chỉ ra nói chung 2) $\not\Rightarrow$ 1) trong trường hợp G là một nhóm reductive với hạng nửa đơn lớn tùy ý (miễn là nhỏ hơn hạng của G). (Xem nhận xét trang 76, 77 trong luận án.)

Chương 4

Quỹ đạo tương đối ứng với tác động của nhóm đại số trên trường địa phương

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bài toán trang bị tôpô trên tập đối đồng điều, trong mối liên quan với vấn đề quỹ đạo đóng (theo tôpô Zariski và tôpô Hausdorff), dưới tác động của nhóm đại số lên đa tạp đại số xác định trên trường đầy đủ, đặc biệt là trường địa phương và cho một số ứng dụng. Cho k là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường v có hạng thực bằng 1, chẳng hạn các trường địa phương như trường số thực $\mathbb{R}$ hoặc trường các số $\mathfrak{p}$-adic $\mathbb{Q}_p$. Ta trang bị cho $X(k)$ tôpô v-adic Hausdorff, cảm sinh từ tôpô v-adic trên k. Cho $x \in X(k)$, chúng tôi quan tâm đến mối liên hệ giữa tính đóng Zariski của quỹ đạo $G \cdot x$ trong X và tính đóng Hausdorff của quỹ đạo (tương đối) $G(k) \cdot x$ của x trong $X(k)$. Kết quả đầu tiên theo hướng này thuộc về Borel và Harish-Chandra (1963), tiếp đến là Birkes (1971) trong trường hợp trường thực, và sau đó là Bremigan (1994) mở rộng cho trường $\mathfrak{p}$-adic.

Lưu ý rằng, một số chứng minh nói trên không mở rộng được cho trường hợp trường có đặc số dương. Mục đích của chương này là nghiên cứu xem các kết quả trên có thể mở rộng được cho những lớp nhóm và những lớp trường nào. Trong cách tiếp cận của chúng tôi, những câu hỏi này liên quan chặt chẽ với bài toán trang bị tôpô trên các nhóm (hoặc tập) đối đồng điều. Đó cũng là khía cạnh quan trọng của lý thuyết đối ngẫu của đối đồng điều Galois và đối đồng điều phẳng trong trường hợp tổng quát (theo Shatz (1964, 1972), Milne (2006)). Một số kết quả sơ bộ được trình bày trong Mục 4.1, với định lý chính là Định lý 4.1.5. Ở Mục 4.2, chúng tôi đưa ra một số kết quả tổng quát về tính đóng của những quỹ đạo tương đối, đặc biệt là trên những trường đầy đủ, hoàn thiện. Định lý chính của mục này là các Định lý 4.2.4, 4.2.6. Trong Mục 4.3, chúng tôi xét trường hợp trường đầy đủ, không nhất thiết hoàn thiện và tác động của nhóm đại số với những nhóm con dừng nằm trong một lớp nhóm đặc biệt, bao gồm các nhóm lũy linh trên trường đầy đủ bất kỳ. Kết quả chính được cho trong Định lý 4.3.1.3.

4.1 Một số kết quả sơ bộ

Các khẳng định sau đây cho mối liên hệ giữa tôpô chính tắc với tôpô đặc biệt, và tính chất liên tục của những ánh xạ giữa các tập đối đồng điều theo các tôpô này.

Định lý 4.1.1 ([6])**.** *Cho k là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường có hạng thực bằng 1. Khi đó với bất kỳ một k-nhóm đại số tuyến tính G, và phép nhúng xác định trên k vào k-nhóm đặc biệt H, tôpô H-đặc biệt trên $\mathrm{H}^1(k,G)$ mạnh hơn tôpô chính tắc trên tập đối đồng điều $\mathrm{H}^1(k,G)$. Hơn nữa, khi G giao hoán và liên thông thì hai tôpô này trùng nhau.*

Định lý 4.1.2 ([6])**.** *Cho trước dãy khớp các k-nhóm đại số tuyến tính $1 \to A \to B \to C \to 1$ $(*)$.*

1) *Nếu ánh xạ đối biên giữa các tập đối đồng điều $\delta : C(k) \to \mathrm{H}^1(k,A)$, cảm sinh từ dãy khớp các k-nhóm $(*)$ là liên tục đối với một tôpô H-đặc biệt nào đó, thì cũng là liên tục đối với tôpô chính tắc của $\mathrm{H}^1(k,A)$.*

2) *Mọi ánh xạ nối của các tập đối đồng điều bậc ≤ 1 được cảm sinh từ $(*)$ là liên tục đối với tôpô chính tắc (tương ứng, tôpô đặc biệt) trên những tập này.*

Nhận xét. Phương pháp chứng minh phần a) của định lý sau đây chủ yếu thuộc về Borel và Tits (1965), và sau đó xuất hiện lại trong Bremigan (1994) và Gille et al. Trong trường hợp k là trường địa phương đặc số 0, các kết quả về các tính chất hữu hạn dưới đây thuộc về Borel và Serre (1963).

Định lý 4.1.5 ([6])**.** *Cho k là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường hạng thực 1 và G là một k-nhóm đại số tuyến tính. Khi đó*

a) *Tập con $\{1\}$ là mở đối với tôpô đặc biệt trong $\mathrm{H}^1(k,G)$. Do đó, nếu G là giao hoán thì tôpô đặc biệt trên $\mathrm{H}^1(k,G)$ là rời rạc.*

b) *Nếu đặc số của trường k bằng 0 thì tôpô đặc biệt trên tập đối đồng điều $\mathrm{H}^1(k,G)$ là rời rạc. Nói riêng ra, nếu k là trường địa phương đặc số 0 thì tập $\mathrm{H}^1(k,G)$ là hữu hạn và rời rạc đối với tôpô đặc biệt. Nếu k là trường không Acsimet và G là giao hoán thì khẳng định như vậy cũng đúng đối với các nhóm $\mathrm{H}^i(k,G)$, $i \geq 1$.*

c) *Cho G là một nhóm đại số tuyến tính tác động chính quy lên k-đa tạp affine X. Nếu $v \in X(k)$ là một điểm sao cho nhóm con dừng của nó là trơn (chẳng hạn khi* $\mathrm{char}.\, k = 0$*) thì quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot v$ là mở trong $(G \cdot v)(k)$ theo tôpô Hausdorff.*

4.2 Quỹ đạo tương đối theo tôpô Hausdorff dưới tác động của nhóm đại số trên trường đầy đủ hoàn thiện

Trong mục này chúng ta thiết lập và chứng minh một kết quả về tính chất đóng của quỹ đạo (hình học hoặc tương đối) của nhóm đại số là tích trực tiếp của một nhóm reductive với một nhóm lũy đơn. Trước khi đi đến kết quả chính, chúng ta cần đến một số kết quả khác, mà một số trong chúng có ý nghĩa độc lập. Dưới đây, các thuật ngữ "mở" và "đóng", nếu không có chú thích gì thêm, được hiểu là theo tôpô Zariski. Khẳng định sau đây là mở rộng của một định lý của Kempf (1978) cho trường hợp nhóm không reductive có dạng tích trực tiếp của một nhóm reductive và một nhóm lũy đơn.

Định lý 4.2.4 ([6])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, $G = L \times U$, trong đó nhóm L là reductive và U là lũy đơn xác định trên k. Cho G tác động k-chính quy lên k-đa tạp affine X, và x là một điểm không ổn định của $X(k)$ (tức là $G \cdot x$ không đóng). Giả sử Y là một tập con đóng, G-bất biến tùy ý của $\overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$. Khi đó, tồn tại một nhóm con một tham số $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$, xác định trên k, và một điểm $y \in Y \cap X(k)$ sao cho $\lambda(t) \cdot x \to y$ khi $t \to 0$.*

Với những kết quả chuẩn bị này, ta có kết quả sau về tôpô của những quỹ đạo.

Định lý 4.2.6 ([6])**.** *Cho k là một trường hoàn thiện, đầy đủ đối với một định giá không tầm thường có hạng thực 1. Cho G là một k-nhóm đại số tuyến tính tác động k-chính quy lên một k-đa tạp affine X, và $x \in X(k)$ là một k-điểm của X. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

1) (Mở rộng một số kết quả của Birkes, Borel, Harish-Chandra, Tits, Bremigan) *Nếu quỹ đạo $G \cdot x$ là đóng và nhóm dừng G_x là một k-nhóm trơn, thì quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot x$ là đóng theo tôpô Hausdorff trong $X(k)$.*

2) *Đảo lại, giả sử $G = L \times U$, trong đó L là reductive và U là lũy đơn, tất cả đều xác định trên k. Nếu $G(k) \cdot x$ là đóng trong $X(k)$ theo tôpô Hausdorff thì $G \cdot x$ là đóng theo tôpô Zariski trong X.*

3) *Với những giả thiết như ở 1), $G(k) \cdot x$ đóng trong $X(k)$ nếu và chỉ nếu $G^0(k) \cdot x$ là đóng trong $X(k)$.*

Nhận xét. Khẳng định 1) của Định lý 4.2.6 ở trên có nguồn gốc từ bài báo của Borel và Harish-Chandra (1963) cho trường hợp trường thực $\mathbb{R}$. Trường hợp tổng quát được suy ra từ một lập luận của Borel, Tits (1965) mà ở đó có dùng đến Định lý hàm ẩn. Lập luận này cũng được xuất hiện lại ở Bremigan (1994). Chiều đảo lại được chứng minh cho nhóm reductive xác định trên trường thực bởi Birkes (1971), và bởi Bremigan (1994) cho các nhóm reductive xác định trên trường địa phương đặc số 0. Ở đây chúng tôi cũng có được kết quả cho các trường hoàn thiện, đầy đủ với định giá không tầm thường với hạng thực bằng 1, vì trong trường hợp đó, Định lý hàm ẩn vẫn đúng.

Từ những lập luận ở trên, ta có kết quả sau đây, cũng là mở rộng của những kết quả đã biết của Borel, Harish-Chandra, Birkes, Bremigan (xem ở phần giới thiệu chương).

Định lý 4.2.7 ([6]). *Cho k, G, V như trong Định lý 4.2.6. Giả sử G_v là một k-nhóm trơn. Khi đó ta có*

1) *Nếu $G = L \times U$, với L và U lần lượt là các nhóm reductive và lũy đơn, thì $G \cdot v$ là đóng Zariski nếu và chỉ nếu $G(k) \cdot v$ là đóng Hausdorff.*

2) *Nếu G là nhóm reductive hoặc lũy linh thì tập $G \cdot v$ là đóng Zariski nếu và chỉ nếu $G(k) \cdot v$ là đóng Hausdorff.*

3) *Giả sử G là một k-nhóm lũy linh và trơn, T là một k-xuyến cực đại duy nhất của G. Thế thì các khẳng định sau là tương đương:*

    a) *$G \cdot v$ là đóng theo tôpô Zariski.*

    b) *$T \cdot v$ là đóng theo tôpô Zariski.*

    c) *$G(k) \cdot v$ là đóng theo tôpô Hausdorff.*

    d) *$T(k) \cdot v$ là đóng theo tôpô Hausdorff.*

Nhận xét. Một định lý nổi tiếng của Mostow (1956) nói rằng, bất kỳ nhóm đại số tuyến tính liên thông xác định trên trường k đặc số 0 đều có phân tích thành tích nửa trực tiếp $G = L \cdot U$, trong đó U là một k-nhóm chuẩn tắc lũy đơn cực đại của G, và L là một k-nhóm con reductive liên thông cực đại. Những nhóm là tích trực tiếp của một nhóm reductive và một nhóm lũy đơn có thể là lớp ví dụ tốt nhất để khẳng định 2) của Định lý 4.2.6 là đúng, nghĩa là sao cho $G \cdot x$ là đóng Hausdorff kéo theo $G \cdot x$ là đóng Zariski. Cụ thể, chúng tôi đưa ra dưới đây ví dụ với chiều nhỏ nhất trong số những nhóm giải được không lũy linh, mà ở đó $G \cdot x$ không là đóng Zariski.

Mệnh đề 4.2.8 ([6]). *Cho B là một nhóm đại số tuyến tính giải được chiều 2, tác động chính quy lên một đa tạp affine X, $x \in X$, tất cả đều xác định trên một trường k đặc số 0.*

1) *Nếu nhóm con dừng B_x của x là một nhóm con vô hạn của B, thì quỹ đạo $B \cdot x$ luôn là đóng.*

2) *Cho $G = \mathrm{SL}_2$, B là nhóm con Borel của G bao gồm các ma trận tam giác trên. Ta chọn biểu diễn tiêu chuẩn của G bằng cách cho G tác động lên V_2 là không gian các đa thức thuần nhất bậc 2 với hệ số trong $\mathbb{C}$, và xem không gian này như một $\mathbb{C}$-không gian vectơ chiều 3. Khi đó $\dim B = 2$, và với $v = (1, 0, 1)^t \in V_2$, ta có*

   a) *Quỹ đạo $G \cdot v = \{(x, y, z) \mid 4xz = y^2 + 4\}$ là một tập đóng theo tôpô Zariski.*

   b) *Quỹ đạo $B \cdot v = \{(x, y, z) \mid 4xz = y^2 + 4\} \setminus \{z = 0\}$ là một tập không đóng theo tôpô Zariski.*

   c) *$B(k) \cdot v = \{(a^2 + b^2, 2bd, d^2) \mid ad = 1, a, b, c, d \in k\}$ là một tập con đóng theo tôpô Hausdorff, với k hoặc là trường thực $\mathbb{R}$ hoặc là một trường p-adic, trong đó p=2 hoặc $p \equiv 3 \pmod 4$.*

   d) *Nhóm con dừng B_v của v trong B là hữu hạn.*

Nhận xét. Chúng ta cũng lưu ý rằng trong trường hợp nhóm giải được, trái ngược với trường hợp lũy linh (xem Định lý 4.2.7), một số tính chất liên hệ về tính đóng của quỹ đạo các nhóm con đóng và tính chất đóng của quỹ đạo của nhóm lớn có thể không đúng. Điều này được chỉ ra trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2.9 ([6]). *Cho G là một nhóm tuyến tính giải được xác định trên một trường địa phương k đặc số 0, T là một k-xuyến cực đại tùy ý của G, và G tác động k-chính quy lên một k-đa tạp affine V. Giả sử $v \in V(k)$ là một điểm k-hữu tỷ. Ta xét các khẳng định sau.*

a) *$G \cdot v$ là tập đóng theo tôpô Zariski;*

b) *$T \cdot v$ là tập đóng theo tôpô Zariski;*

c) *$G(k) \cdot v$ là tập đóng theo tôpô Hausdorff;*

d) *$T(k) \cdot v$ là tập đóng theo tôpô Hausdorff.*

Khi đó ta có sơ đồ lôgic sau
b) $\Leftrightarrow$ d), a) $\Rightarrow$ c), a) $\not\Rightarrow$ b), b) $\not\Rightarrow$ a), c) $\not\Rightarrow$ d), d) $\not\Rightarrow$ c), c) $\not\Rightarrow$ a).

4.3 Quỹ đạo tương đối của nhóm đại số trên trường đầy đủ bất kỳ

Trong mục này chúng ta xem xét chủ yếu các tác động của nhóm đại số với nhóm dừng là lũy linh hoặc (gần với lũy linh) trên trường k bất kỳ, đầy đủ đối với một định giá không tầm thường, hạng thực bằng 1. Đặc biệt, chúng ta quan tâm đến các nhóm xác định trên trường hàm địa phương, một trường hợp quan trọng của các trường không hoàn thiện.

4.3.1 Tác động tách mạnh, tác động khá tách

Kết quả chính đầu tiên của Phần 4.3 là Định lý 4.3.1.3. Định lý nói rằng, dưới một số giả thiết tự nhiên và yếu, chúng tôi giải quyết được trường hợp nhóm reductive và nhóm lũy linh. Kết quả triệt để nhất, không cần có thêm điều kiện gì đã thu được cho trường hợp nhóm giao hoán và nhóm lũy đơn. Trong Mục 4.3.2, 4.3.6 (tương ứng 4.3.7) chúng tôi chứng minh một số kết quả về tính đóng của quỹ đạo dưới tác động của một số lớp nhóm đặc biệt, và nhóm dừng của chúng bao gồm lớp nhóm lũy linh (tương ứng reductive). Trước hết, chúng tôi nhắc lại khái niệm tác động tách mạnh (strongly separable) của nhóm đại số (theo Ramanan và Ramanathan (1984)).

Định nghĩa 4.3.1.1. Cho G là một nhóm đại số tuyến tính tác động chính quy lên một đa tạp affine V và $\overline{G \cdot v}$ là bao đóng Zariski của $G \cdot v$ trong V. Tác động của G được gọi là *tách mạnh* tại v nếu với mọi $x \in \overline{G \cdot v}$ thì nhóm con dừng G_x là trơn, hoặc tương đương, cấu xạ $G \to G/G_x$ là tách.

Liên quan đến khái niệm này, ta có định nghĩa

Định nghĩa 4.3.1.2 ([6])**.** Ta nói một tác động là *"khá tách"* (fairly separable) tại v nếu với mọi $x \in (G \cdot v)(k)$ thì G_x là một k-nhóm con trơn của G.

Định lý 4.3.1.3 ([6])**.** *Cho k là một trường đầy đủ đối với một định giá không tầm thường có hạng thực bằng 1, và G là một k-nhóm đại số tuyến tính tác động k-cấu xạ lên một k-đa tạp affine V. Giả sử $v \in V(k)$. Ta có các khẳng định sau:*

1) *Nếu quỹ đạo tương đối $G(k) \cdot v$ là đóng trong tôpô Hausdorff của $V(k)$ và hoặc G là lũy linh, hoặc G là reductive với tác động của G là tách mạnh tại v, thì quỹ đạo $G \cdot v$ là đóng theo tôpô Zariski trong V.*

2) *Đảo lại, với những quy ước trên, $G(k) \cdot v$ là đóng Hausdorff trong $V(k)$ nếu $G \cdot v$ đóng và một trong các điều kiện sau là đúng:*

   a) *G_v là giao hoán và trơn; hoặc nhóm G là giao hoán.*

b) *G_v là một k-nhóm trơn và là mở rộng của một k-nhóm lũy đơn trơn bởi một k-nhóm chéo hóa được.*

c) *Trường k là compắc địa phương, và G_v là một k-nhóm con reductive liên thông và trơn trong G.*

d) *Tác động của G tại v là khá tách.*

Nhận xét. 1) Nếu đặc số của trường k bằng 0 thì định lý này nằm trong kết quả chính của Mục 4.2. Vì thế, kết quả này chỉ thú vị trong trường hợp trường không hoàn thiện, ví dụ như trường hàm địa phương.

2) Các ví dụ ở Mục 4.4 chỉ ra rằng nếu một trong những điều kiện của G trong Định lý 4.3.1.3, Phần 1) (tính lũy linh, tính tách mạnh) bị vi phạm thì khẳng định 1) không đúng. Chứng minh Định lý 4.3.1.3 được chia làm nhiều phần. Bên cạnh đó chúng tôi có một số kết quả khác có liên quan như sau.

4.3.7 Trường hợp G là một k-nhóm tuyến tính lũy linh

Ta giả sử G là một k-nhóm tuyến tính lũy linh, $G = T \times U$, trong đó T là một k-nhóm chéo hóa được, U là một k-nhóm lũy linh. Ta đặt $T^0 = T_s \cdot T_a$, trong đó T_s, T_a tương ứng là các xuyến con k-phân rã và k-không đẳng hướng cực đại của T, và tích nói trên là hầu trực tiếp, xác định trên k. Ta biết rằng, luôn tồn tại một nhóm con chuẩn tắc k-phân rã cực đại $U_d \trianglelefteq U$ sao cho thương $U_w := U/U_d$ là k-xoắn, nghĩa là không tồn tại một k-nhóm con nào đẳng cấu (trên k) với nhóm cộng tính $\mathbb{G}_a$. Khẳng định sau cho phép ta quy bài toán trong trường hợp G là một k-nhóm lũy linh tùy ý về trường hợp $G = T \times U$, với T, U đều là các nhóm k-phân rã.

Mệnh đề 4.3.7.1 ([6])**.** *Với k là một trường compắc địa phương, giả sử G tác động k-chính quy lên một k-đa tạp affine V, và $v \in V(k)$. Giả sử thêm rằng, $G \cdot v$ là đóng trong V, $G = T \times U$, trong đó T là một k-nhóm chéo hóa được, và U là một k-nhóm lũy đơn. Khi đó nếu $(T_s(k) \times U_d(k)) \cdot v$ là đóng Hausdorff trong $((T_s \times U_d) \cdot v)(k)$ thì $G(k) \cdot v$ là đóng Hausdorff trong $V(k)$.*

Chúng ta có hệ quả sau.

Hệ quả 4.3.7.2 ([6])**.** *Cho k là một trường compắc địa phương, G là một k-nhóm con lũy linh, trơn của $\mathrm{GL}(V)$ và G tác động tuyến tính lên V thông qua biểu diễn tiêu chuẩn. Giả sử $G \cdot v$ là đóng. Khi đó, $G(k) \cdot v$ là tập đóng Hausdorff trong $V(k)$.*

4.4 Một số tính toán trong trường hợp trường có đặc số p

Dưới đây chúng tôi đưa ra hai ví dụ tính toán đối với trường hợp trường có đặc số $p \neq 0$.

Mệnh đề 4.4.1 ([6]). *Cho $G = \mathrm{SL}_2$ xác định trên một trường hàm địa phương đặc số 2, và ρ, V là biểu diễn được cho như trong Mệnh đề 4.2.8, $v = (1,0,1)^t \in V(k)$. Khi đó*

1) $G \cdot v = \{(x,0,z)^t \in \bar{k} \times \bar{k} \times \bar{k} \mid (x,z) \neq (0,0)\}$ *và $G \cdot v$ không là đóng trong V.*

2) $G(k) \cdot v$ *là đóng trong $(G \cdot v)(k)$, và $G(k) \cdot v$ không là đóng trong $V(k)$.*

3) *Cho B là nhóm con Borel của G như trong Mệnh đề 4.2.8. Khi đó $B \cdot v$ không đóng trong V, $B(k) \cdot v$ không là đóng trong $V(k)$, và $B(k) \cdot v$ là đóng trong $(B \cdot v)(k)$*[1].

4) *Cho U là căn lũy đơn của B. Khi đó $U(k) \cdot v$ là đóng trong $V(k)$, và nhóm con dừng $G_v \cong \alpha_2$ là một lược đồ nhóm không trơn.*

Ví dụ sau đây cho thấy một số khẳng định của Định lý 4.3.1.3 không đúng nếu ta bỏ đi một số điều kiện liên quan đến tính tách của tác động.

Mệnh đề 4.4.2 ([6]). *Cho p là một số nguyên tố, $k = \mathbb{F}_q((T))$, $q = p^r$, $G = \mathrm{SL}_2$, V là không gian vectơ hai chiều xác định trên k và biểu diễn ρ được cho bởi*

$$\rho : G = \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{GL}_2, g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{pmatrix}, v = (1,T)^t \in k^2.$$

Khi đó

1) $G \cdot v = V \setminus \{(0,0)\}$ *là tập mở (và không đóng) trong V.*

2) $G(k) \cdot v$ *là tập đóng trong $V(k)$.*

3) *Giả sử rằng B được cho như trên. Khi đó $B \cdot v = \{(x,y) \in V \mid y \neq 0\}$ là tập mở (và không đóng trong V).*

4) $B(k) \cdot v$ *là tập đóng trong $V(k)$.*

5) *Cho U là nhóm lũy đơn như Mệnh đề 4.4.1. Khi đó quỹ đạo $U(k) \cdot v$ là tập đóng trong $V(k)$ và $U_v \cong \alpha_p$ là lược đồ nhóm không trơn.*

6) *Các không gian quỹ đạo $U(k) \cdot v$, $B(k) \cdot v$, $G(k) \cdot v$ không là mở trong $V(k)$.*

[1] Trường hợp này khác với trường hợp char.$(k) = 0$, ở đó $B(k) \cdot v$ là đóng trong $V(k)$.

Kết luận của luận án

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả chính sau.

1. Chứng minh những khẳng định về tính chất hữu tỷ cho các nhóm con quan sát được, nhóm con toàn cầu, và nhóm con Grosshans.

2. Mở rộng một kết quả của F. Bogomolov cho trường hoàn thiện. Chứng minh một khẳng định về liên hệ giữa các khái niệm nhóm con tựa parabolic, dưới parabolic, trong trường hợp k là hoàn thiện. Kết quả này chứa một mở rộng của Định lý Sukhanov cho trường hoàn thiện.

3. Nghiên cứu mối liên hệ giữa tính đóng Zariski của quỹ đạo hình học và tính đóng Hausdorff của quỹ đạo tương đối. Liên hệ chúng với bài toán trang bị tôpô trên tập đối đồng điều Galois (hoặc phẳng) và thu được một số kết quả về tôpô trên các tập đối đồng điều này.