На правах рукописи

Нгуен Тхи Хиен

О дифференциальных уравнениях систем гистерезисного типа

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ – 2010

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Садовский Борис Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Перов Анатолий Иванович

доктор физико-математических наук, профессор Семенов Михаил Евгеньевич

Ведущая организация: Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Защита состоится 21 декабря 2010 г. в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан ___ ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212. 038. 22
доктор физико-математических наук, профессор Гликлих Ю.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Системы с гистерезисом активно изучаются в связи с различными задачами физики, техники, теории управления. Основы математической теории систем с гистерезисом заложены в монографии М.А. Красносельского и А.В. Покровского "Системы с гистерезисом". В последовавшей серии работ различных авторов при изучении систем гистерезисного типа использовались явные и полуявные описания гистерезисных элементов по Красносельскому – Покровскому, а также в последнее время локально явное описание Прядко – Садовского. В диссертации изучена возможность описания гистерезисных элементов и систем с гистерезисом с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр. Такой подход позволяет применять для численного и качественного анализа систем с гистерезисом программы и методы, разработанные для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью работы являются разработка гладких описаний гистерезисных элементов, сравнение новых описаний с известными дискретными, явными и полуявными, изучение примеров систем гистерезисных типов с использованием гладких моделей.

Методика исследований. В диссертации использовались методы теории функций и нелинейного функционального анализа; идеи и методы теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Перечисленные ниже основные результаты диссертации являются новыми.

1. Разработаны описания реле с гистерезисом, упора, люфта и системы с диодной нелинейностью в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром.

2. Доказаны теоремы о близости поведений систем гистерезисного типа при использовании классических моделей, с одной стороны, и разработанных в диссертации гладких описаний - с другой.

3. Проведено исследование ряда конкретных систем гистерезисного типа с использованием гладких описаний.

В частности, введено и исследовано понятие выходной функции реле на всей оси; исследованы системы автоматического управления с одним, двумя реле; изучено поведение выходной функции бесконечного множества реле; рассмотрены примеры численного анализа оператора упора и люфта, изучена система с диодной нелинейностью в четырехугольнике на плоскости; доказана теорема о существовании и усиленной орбитальной устойчивости замкнутой траектории; проведены численные эксперименты по нахождению замкнутой траектории.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты имеют как теоретическую, так и практическую направленность; они могут быть использованы при исследовании конкретных систем гистерезисного типа и приближенном решении связанных с ними задач.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, могут найти применение в исследованиях по теории систем с гистерезисом, проводимых в научных коллективах Института проблем управления РАН, Института проблем передачи информации РАН, а также Воронежского, Нижегородского, Ростовского, Саратовского, Челябинского и Ярославского государственных университетов.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [7]. В совместных публикациях [5], [6] соавтору принадлежит постановка задач.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы, включающего 55 источников. Общий объем диссертации – 99 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дан краткий обзор исследований по ее тематике и приведена общая информация о предлагаемых в работе математических описаниях таких элементов и систем, как реле с гистерезисом, упор, люфт и система с диодной нелинейностью.

Реле рассматривается как преобразователь с произвольным непрерывным входом $x(t)$ и выходом $y(t)$, имеющим два возможных значения 0 и 1, причем при $x(t) \leq \alpha$ – только 0, при $x(t) \geq \beta$ – только 1. 0 скачком меняется на 1 при достижении входным сигналом значения β, 1 на 0 – при достижении α. При этом α, β $(\alpha < \beta)$ называются, соответственно, нижним и верхним пороговыми значениями реле. Таким образом, *областью* $\Omega(\alpha, \beta)$ *допустимых состояний* реле с пороговыми значениями α и β является множество точек (x, y) плоскости, лежащих на двух полупрямых: $y = 0$ при $x < \beta$ и $y = 1$ при $x > \alpha$.

В монографии М.А. Красносельского и А.В. Покровского "Системы с гистерезисом" дано следующее явное описание такого реле, в котором начальное состояние $(x_0, y_0) \in \Omega(\alpha, \beta)$:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(t) \leq \alpha \vee \exists(t_1)[x(t_1) = \alpha \wedge \forall(\tau \in (t_1, t])[x(\tau) < \beta]], \\ 1, & \text{если } x(t) \geq \beta \vee \exists(t_1)[x(t_1) = \beta \wedge \forall(\tau \in (t_1, t])[x(\tau) > \alpha]], \\ y_0, & \text{если } x(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ при всех } \tau \in [t_0, t]. \end{cases} \tag{1}$$

При таком описании выходная функция меняет свое значение точно в моменты достижения входной функции пороговых значений, т.е. выходная функция непрерывна справа.

Следуя статье И.Н. Прядко и Б.Н. Садовского "О локально явных моделях некоторых негладких систем", выходной сигнал можно задать локально явным уравнением:

$$y(t + dt) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ x(t) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } \ x(t) \geq \beta, \\ y(t), & \text{если } \ \alpha < x(t) < \beta. \end{cases} \tag{2}$$

Решение уравнения (2) определяется как непрерывная слева функция $y(t)$, которая при каждом t из ее области определения удовлетворяет этому уравнению при достаточно малых положительных $dt : dt \in (0, \delta(t))$, $\delta(t) > 0$. В дальнейшем, если (x_0, y_0) лежит в области допустимых состояний реле в виде локально явного уравнения (2), то мы обозначим $R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)$ решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$. Утверждение о существовании и единственности такого решения доказано в той же статье.

Нелинейности люфт и упор широко используются в различных разделах физики, механики, теории управления и др. *Одномерный упор*, соответствующий отрезку $[0, 1]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему входу $x(t) \quad (t \geq t_0)$ и начальному состоянию $u_0 \in [0, 1]$ сопоставляет выходной сигнал $u(t)$, который возрастает с той же скоростью, что и вход $x(t)$, до тех пор, пока $u(t)$ не становится равным верхнему ограничению 1; после этого при дальнейшем возрастании входного сигнала, выход $u(t)$ равняется единице, т.е. $u(t) = \min\{1, x(t) - x(t_0) + u(t_0)\}$. Для убывающего входа $x(t)(t \geq t_0)$ и начального состояния $u_0 \in [0, 1]$ выход $u(t)$ со скоростью входа убывает до достижения нижнего ограничения 0; после этого при дальнейшем убывании входного сигнала, выход $u(t)$ не меняется, т.е. $u(t) = \max\{0, x(t) - x(t_0) + u(t_0)\}$.

Одномерный люфт, соответствующий отрезку $[0, 1]$ – это преобразователь, который монотонно возрастающему непрерывному входу $x(t)$ и начальному состоянию $v_0 \in [x(t_0), x(t_0) + 1]$ сопоставляет выход $v(t)$, который равен v_0, пока $x(t) \leq v_0$, и $x(t)$ в дальнейшем, т.е. $v(t) = \max\{v_0, x(t)\}$. Для убывающего входа $x(t)$ и начального состояния $v_0 \in [x(t_0), x(t_0)+1]$ выход определяется аналогично: v_0, пока $x(t)+1 \geq v_0$, и $x(t)+1$ в дальнейшем, т.е. $v(t) = \min\{v_0, x(t)+1\}$. Такие описания упора и люфта очевидным образом распространяются на кусочно монотонные непрерывные входы.

В монографии М.А. Красносельского и А.В. Покровского "Системы с гистерезисом" дано следующее описание упора и люфта. Кусочно-гладкая входная функция $x(t)(t \geq t_0)$ преобразуется в выходные упора функцию

$\varphi(t)$ и люфта функцию $\psi(t)$, определяемые соотношениями:

$$\dot{\varphi} = \begin{cases} \dot{x}, & \text{если } \varphi \in (0,1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 0; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \varphi = 1. \end{cases} \tag{3}$$

$$\dot{\psi} = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi \in (x, x+1); \\ \max\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x; \\ \min\{0, \dot{x}\}, & \text{если } \psi = x+1. \end{cases} \tag{4}$$

В этой монографии доказано, что при заданном начальном условии решения двух последующих дифференциальных уравнений существуют и единственны; определения этих операторов распространяются по непрерывности на любые непрерывные входы. Кроме этого, доказано, что операторы упора и люфта обладают свойствами *детерминированности, статичности, управляемости, виброкоректности* и *монотонности.*

В статье И.Н. Прядко и Б.Н. Садовского "О локально явных моделях некоторых негладких систем", даются математические описания упора и люфта в виде локально явных уравнений. Для монотонных входов $x(t)$ выходные сигналы упора $u(t)$ и люфта $v(t)$ при малых $dt \geq 0$ можно задать локально явными уравнениями:

$$u(t+dt) = \begin{cases} x(t+dt) - x(t) + u(t), & \text{если } u(t) \in (0,1), \\ x(t+dt) - \max\limits_{t \leq s \leq t+dt} x(s) + u(t), & \text{если } u(t) = 1, \\ x(t+dt) - \min\limits_{t \leq s \leq t+dt} x(s) + u(t), & \text{если } u(t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$v(t+dt) = \begin{cases} \max\limits_{t \leq s \leq t+dt} x(s) - x(t) + v(t), & \text{если } v(t) = x(t), \\ \min\limits_{t \leq s \leq t+dt} x(s) - x(t) + v(t), & \text{если } v(t) = x(t)+1, \\ v(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{6}$$

В статье доказано, что описания упора (5) и люфта (6) имеют смысл для всех непрерывных входов и они эквивалентны, соответственно, приведенным выше феноменологическим описаниям. Кроме этого, доказана теорема о глобальной разрешимости и единственности сильного решения уравнений (5) и (6) с заданными начальными условиями.

Системы с диодными нелинейностями введены в качестве математического описания электрических цепей с диодными преобразователями тока. С точки зрения теории цепей диод называется *идеальным*, если его ток i и напряжение u от анода к катоду удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{cases} i \geq 0, \\ u \leq 0, \\ i \cdot u = 0. \end{cases}$$

Описание таких цепей сводится к изучению систем, называемых *обобщенными* системами с диодной нелинейностью. Пусть Q – непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда обобщенная система с диодной нелинейностью имеет вид:

$$\dot{x} = \tau_x f(t, x), \tag{7}$$

где $\tau_x f(t, x)$ – проекция вектора $f(t, x)$ на T_x – касательный конус к Q в точке x.

В ряде работ Б.Н. Садовского и его учеников для системы (7) изучен вопрос о разрешимости; приведено достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия; рассмотрены условия существования периодического решения, эта задача связана с вопросом о вынужденных колебаниях в электрических цепях, содержащих диоды; доказано обобщение известной теоремы Пуанкаре – Бендиксона о существовании замкнутой траектории и описана ситуация, в которой гарантируется существование единственного орбитально устойчивого в усиленном смысле цикла.

Кроме того, во введении изложены основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе доказана практическая эквивалентность описаний реле в явном (1) и локально явном виде (2), введены и обоснованы обозначения для выхода реле: $R^t_{t_0}(\alpha,\beta,x)(y_0)$ и $R^t_{-\infty}(\alpha,\beta,x)(y_0)$, доказаны свойства реле: автономность, вольтерровость (причинность), полугрупповое свойство, статичность, управляемость и доказано утверждение о периодических входах и выходах.

Во второй главе предлагается описание реле с гистерезисом, записываемое в виде обыкновенного дифференциального уравнения с большим параметром. Такое описание удобно для численного анализа с применением современных пакетов прикладных программ. Оно может быть полезным и для качественного исследования систем управления методами теории дифференциальных уравнений. Изучается вопрос о погрешности гладкого описания по отношению к известному дискретному локально явному описанию (2). Основной результат заключается в том, что для некоторого класса систем релейного управления поведения таких систем с гладким описанием равномерно на любом временном промежутке стремятся к соответствующим поведениям с локально явным описанием при стремлении параметра в гладком описании к бесконечности. Найдены оценки близости этих поведений, рассмотрен частный случай. Построение и исследование такого описания составляет предмет данной главы.

В параграфе 2.1 дано *гладкое* описание реле:

$$\begin{cases} \dot{w} = K[(x-\beta)_+(1-w) - (\alpha - x)_+ w], \\ \widetilde{y} = \mathrm{int}(w + \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь: $w = w(t)$ – промежуточная (гладкая) выходная функция; K – большой параметр; $x = x(t)$ – входная непрерывная функция; $\widetilde{y} = \widetilde{y}(t)$ – (дискретная) выходная функция; x_+ – *положительная часть числа* x, т.е. $\max\{0, x\}$; $\mathrm{int}(x)$ – *непрерывная слева целая часть числа* x, т.е. наибольшее целое число, меньшее x.

Для выхода реле в гладком описании (8), соответствующего входу x и начальному условию $\widetilde{y}(t_0) = w(t_0) = y_0$, будем использовать обозначение $\widetilde{R}^t_{t_0}(\alpha,\beta,x)(y_0)$.

В параграфе 2.2 доказана теорема о степени несовпадения выходов гладкого и локально явного описания: *пусть непрерывная функция* x *в точках локального минимума и максимума не принимает значение, соответственно,* α *и* β. *Тогда на любом конечном отрезке* $[t_0, T]$ *степень несовпадения выходов локально явного и гладкого реле, характеризующаяся следующей величиной*

$$\mu = \mu\{t \in [t_0, T] : R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0) \neq \widetilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0)\},$$

стремится к 0 *при* $K \to +\infty$.

В параграфах 2.3 – 2.5 сформулирована и доказана теорема о близости. Рассматриваются следующие две системы:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, u, y), \\ x(t) = \varphi(u(t)), \\ y(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_0), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{u}} = f(t, \widetilde{u}, \widetilde{y}), \\ \widetilde{x}(t) = \varphi(\widetilde{u}(t)), \\ \widetilde{y}(t) = \widetilde{R}_{t_0}^t(\alpha, \beta, \widetilde{x})(y_0), \\ \widetilde{u}(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема о близости формулируется следующим образом: *при некоторых условиях на функции* f *и* φ *для любого решения* $u(t)$ $(t_0 \leq t \leq T)$ *системы* (9) *существуют такие константы* C *и* K_0, *что при* $K \geq K_0$ *решение* $\widetilde{u}(t)$ *системы* (10) *удовлетворяет неравенству:*

$$||\widetilde{u}(t) - u(t)|| \leq \frac{C}{\sqrt{K}} \quad (t_0 \leq t \leq T).$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью леммы о зависимости решений от начальных данных и параметра (в п. 2.5.1) и следующих утверждений (в п. 2.5.2 – 2.5.5): утверждения об оценке времени срабатывания гладкого реле; утверждения о близости поверхностей уровня; утверждения об оценке промежутка между выходами на пороговые значения и утверждения об оценке близости.

В параграфе 2.6 изучается частный случай, в котором рассматриваемые системы (9) и (10) являются скалярными. Тогда при некоторых условиях на функцию f указанную оценку для C в теореме о близости можно улучшить, а параметр $K > 0$ в (8) можно выбирать произвольно.

В третьей главе рассматриваются примеры анализа некоторых систем с релейным управлением. В параграфе 3.1 изучается система с одним реле на плоскости:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2y(t) & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1-2y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $y(t)$ – выход реле в виде локально явного уравнения с положительными пороговыми значениями α, β и входной функцией $x(t) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. При этом доказывается критерий периодичности решений: *для того, чтобы начиная с некоторого момента, решение системы* (11) *было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы* $\varepsilon \in \tilde{\mathbb{Q}} = \frac{\pi}{\ln\beta - \ln\alpha}\mathbb{Q}$. Кроме того, в этом параграфе проводятся некоторые эксперименты численного анализа на основе гладкого описания реле.

В параграфе 3.2 исследуется вопрос о существовании периодического решения системы с двумя реле:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ x(0) = x_0, \\ y = y_1 + y_2, \\ y_1(t) = R_{t_0}^t(\alpha, \beta, x)(y_{01}), \\ y_2(t) = R_{t_0}^t(\gamma, \delta, x)(y_{02}). \end{cases} \tag{12}$$

Для случая, когда пороговые значения двух реле вложены, именно, $\gamma < \alpha$ и $\beta < \delta$, в этом параграфе сформулировано и доказано утверждение о существовании периодического решения: *пусть функции* $f(x,0), f(x,1), f(x,2)$ *удовлетворяют локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:*

$$\textit{на } [\alpha,+\infty) \quad f(x,2)<0,$$

$$\textit{на } (-\infty,\beta] \quad f(x,0)>0,$$

$$\textit{на } [\gamma,\frac{\alpha+\beta}{2}] \quad f(x,1)<0,$$

$$\textit{на } (\tfrac{\alpha+\beta}{2},\delta] \quad f(x,1)\geq r>0, \ \textit{причём}$$

$$\textit{существует конечный предел } \ f(x,1) \ \textit{при } x\to\tfrac{\alpha+\beta}{2}+0.$$

Тогда для любого $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\alpha+\beta}{2}\}$ *каждое решение системы* (12), *начиная с некоторого момента, является периодическим вправо и любые два решения этой системы, начиная с некоторого момента, совпадают с точностью до сдвига по времени.*

В параграфе 3.3 изучается бесконечная система реле с пороговыми значениями $(-n,n)$ $(n\in\mathbb{N})$, общей входной функцией $x(t)$ и выходными функциями n-ого реле $y_n(t)$ в виде локально явного уравнения (2). Выходная функция бесконечной системы реле задается следующей формулой:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}R_{t_0}^t(-n,n,x)(y_{n0})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}y_n(t), -\infty\leq t_0\leq t.$$

В этом параграфе доказаны утверждения о существовании и единственности периодического выхода с любым наперед заданным средним значением из некоторого отрезка, однозначно определяемого входной функцией.

В четвертой главе для гистерезисных преобразователей упора и люфта предложены гладкие описания в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром. Описания упора и люфта, построенные в этой главе, отличаются от описаний (3) и (4) тем, что с помощью *сглаженной* входной функции $\xi(t)$ для непрерывной входной функции $x(t)(t\in[t_0,T])$ (см. параграф 4.1) они определяются сразу для любых непрерывных функций, а не только кусочно гладких входов. Именно, гладкие выходные функции упора $u(t)$ и люфта $v(t)$, соответствующие непрерывному входу $x(t)$ и (большому) параметру K, зададим уравнениями:

$$\dot{u} = \dot{\xi} + K[(-u(t))_+ - (u(t)-1)_+], \tag{13}$$

$$\dot{v} = K[(\xi(t) - v(t))_+ - (v(t) - 1 - \xi(t))_+], \tag{14}$$

где $\xi = \xi(t)$ – *сглаженная* входная функция для непрерывной входной функции $x(t)$.

В параграфе 4.2 доказано утверждение об оценке близости выходов упора с гладким входом при гладком и классическом описаниях. С помощью этого утверждения в параграфах 4.3 и 4.4 сформулированы и доказаны утверждения об оценке близости между выходами упора (люфта) для гладких и классических описаний, в которых входная функция является непрерывной; полученные оценки выражаются через модуль непрерывности входной функции $\omega(x, \frac{1}{K})$ (см. параграф 4.3).

Для упора утверждение формулируется следующим образом: *пусть* $\varphi(t)$, $u(t)$ *– решения, соответственно, уравнения* (3) *и* (13), *удовлетворяющие начальным условиям:*

$$\varphi(t_0) = u(t_0) = u_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ *на* $[t_0, T]$ *будет верна следующая оценка:*

$$|u(t) - \varphi(t)| \leq 3\omega(x, \frac{1}{K}).$$

Для люфта утверждение формулируется следующим образом: *пусть* $\psi(t)$, $v(t)$ *– решения, соответственно, уравнения* (4) *и* (14), *удовлетворяющие начальным условиям:*

$$\psi(t_0) = v(t_0) = v_0.$$

Тогда для любого $K > 0$ *на* $[t_0, T]$ *будет верна следующая оценка:*

$$|v(t) - \psi(t)| \leq 2\omega(x, \frac{1}{K}).$$

В параграфе 4.5 на основе гладкого описания упора и люфта приводятся эксперименты численного анализа, в которых получены приближенные решения систем (3) и (4) с непрерывной входной функцией.

В последней пятой главе изучается гладкое описание системы с диодной нелинейностью. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью вида (7) построена и изучена близкая к ней система с непрерывной правой частью и большим параметром K. Такое *гладкое* описание определяется следующим уравнением (см. параграф 5.1):

$$\dot{y} = f(t, \overline{y}) - K(y - \overline{y}). \tag{15}$$

Здесь $\overline{y} = P(y, Q)$ – проекция y на Q – непустое замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$; для $t \in [t_0, t_0+T]$ и $x \in Q$ функция $f(t,x)$ непрерывна по t при фиксированном x, удовлетворяет по x условию Липшица с константой L и ограничена по норме константой C.

В параграфе 5.2 доказана теорема о точности гладкого описания системы с диодной нелинейностью: *пусть* $x(t), y(t)$ *– решения систем* (7), (15)*, соответственно, удовлетворяющие одинаковым начальным условиям:*

$$x(t_0) = y(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ *верна следующая оценка:*

$$||x(t) - y(t)|| \leq \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

В частном случае (в параграфе 5.3) по сравнению с (15) введено и другое гладкое описание – более эффективное, не использующее оператора проектирования. В двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим множество Q как пересечение двух полупространств Q_1 и Q_2, которые являются множествами векторов z, соответственно, удовлетворяющих при некоторых фиксированных единичных $n_i \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$ неравенствам $(n_i, z) \leq 0$. Пусть n_1, n_2 не коллинеарны и $\omega \in (0, \pi)$ – меньший из двух углов между этими векторами. В частном случае *гладкое описание* определяется следующим уравнением:

$$\dot{z} = f(t,z) - K \max\{(n_1,z)_+, (n_2,z)_+\} \sum_{l \in M(z)} n_l, \tag{16}$$

где

$$l \in M(z) \Leftrightarrow (n_l, z) = \max\{(n_1,z)_+, (n_2,z)_+\}.$$

С помощью теоремы о точности гладкого описания системы с диодной нелинейностью в этом параграфе доказана теорема о близости решений соответствующих начальных задач порядка $1/\sqrt{K}$: *пусть* $x(t), z(t)$ – *решения систем* (7), (16)*, соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:*

$$z(t_0) = x(t_0) = x_0 \in Q.$$

Тогда при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ *справедлива следующая оценка:*

$$||x(t) - z(t)|| \le \frac{Ce^{LT}}{\sqrt{L \min\{2\cos\frac{\omega}{2}, 1\} \cos\frac{\omega}{2}}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

В параграфе 5.4 рассматривается электрическая цепь, которая состоит из сопротивления R, индуктивности $\widetilde{L}$ и источника ЭДС, подключенного с помощью диодного двухполупериодного выпрямителя. Описание этой цепи приводится к дифференциальному уравнению вида (7) и соответствующей гладкой модели (16). С помощью теоремы предыдущего параграфа получена оценка близости соответствующих решений.

В параграфе 5.5 сформулирована и доказана обобщенная теорема о существовании и единственности предельного цикла.

В параграфе 5.6 рассматривается пример применения этой обобщенной теоремы. Пусть множество $Q \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторый выпуклый четырехугольник. На этом множестве рассматривается система (7), в которой функция f не зависит от t, именно, рассмотрим $f(x) = A(x - x_*)$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\varepsilon \\ \varepsilon & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \varepsilon > 0 \text{ и } \quad x_* \in \mathrm{int} Q$$

(см. п. 5.6.1). В пункте 5.6.2 доказана теорема, в которой найдено достаточное условие на параметр $\varepsilon > 0$ для того, чтобы все условия обобщенной теоремы были выполнены.

В параграфе 5.7 на основе (16) определено гладкое описание для примера из предыдущего параграфа. При этом доказана теорема об оценке близости между решениями классического и гладкого описания. Кроме того, приводятся некоторые эксперименты численного анализа и для одного конкретного получена оценка близости между соответствующими решениями.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Нгуен Тхи Хиен. Анализ автоколебаний в системе с двумя реле / Нгуен Тхи Хиен // Труды математического факультета. – Воронеж: ВорГУ, 2006. – Вып. 10 (новая серия). – С. 112-118.

[2] Нгуен Тхи Хиен. Анализ автоколебаний в системе с двумя реле / Нгуен Тхи Хиен // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2006 г. – Воронеж: ВорГУ, 2006. – С. 69.

[3] Нгуен Тхи Хиен. Гладкие модели упора и люфта / Нгуен Тхи Хиен // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 92-95.

[4] Нгуен Тхи Хиен. Гладкие модели упора и люфта / Нгуен Тхи Хиен // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2010 г. – Воронеж: ВорГУ, 2010. – С. 108-109.

[5] Нгуен Тхи Хиен. Гладкая модель реле с гистерезисом / Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна: тез. докл, Воронеж, 2010 г. – Воронеж: ВорГУ, 2010, с. 109-110.

[6] Нгуен Тхи Хиен. Гладкая модель реле с гистерезисом / Нгуен Тхи Хиен, Б.Н. Садовский // Автом. и телемех. – 2010. – № 11. – С. 100-111.

[7] Нгуен Тхи Хиен. О точности гладкой модели системы с диодной нелинейностью / Нгуен Тхи Хиен // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 240-243.

Работы [6], [7] соответствуют списку ВАК.