На правах рукописи

НГУЕН ВАН ЛОЙ

Методы нелинейного многозначного анализа в задачах операторных и дифференциальных включений

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2010

Работа выполнена в Воронежском государственном
педагогическом университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Обуховский Валерий Владимирович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Сапронов Юрий Иванович**

доктор физико-математических наук,
профессор **Красносельский Александр Маркович**

Ведущая организация: Российский университет дружбы народов

Защита состоится 21 декабря 2010 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан “ ____ “ ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Гликлих Ю. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Применение геометрических и топологических методов нелинейного анализа к исследованию различных вопросов теории операторных и дифференциальных уравнений имеет давнюю историю и восходит к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. Дальнейшее развитие эти методы получили в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, J. Mawhin'a и многих других исследователей.

Начиная со второй половины XX века, эти методы распространяются на теорию дифференциальных включений. Развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что дифференциальные включения являются удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального уравления, математической физики, математической экономики и др. Различные задачи теории дифференциальных включений были изучены с помощью методов нелинейного и многозначного анализа в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, М.И. Каменского, А.И. Поволоцкого, Ю.Е. Гликлиха, В.Г. Звягина, А.В. Арутюнова, В.Г. Задорожного, А.И. Булгакова, Е.Л. Тонкова, А.А. Толстоногова, В.В. Филиппова, J.P. Aubin'a, A. Cellina, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, W. Kryszewski, P. Nistri, N.S. Papageorgiou, P. Zecca и других.

Важное место в исследовании дифференциальных и функционально-дифференциальных включений занимают задачи о существовании периодических решений и задачи о глобальной структуре множества периодических решений.

Одним из наиболее эффективных средств решения задач о периодических колебаниях является метод направляющих функций, разработанный М.А. Красносельским, А.И. Перовым и др. Различные модификации этого метода можно найти в работах А.И. Перова, Н.А. Бобылева, Д.А. Рачинского, В.В. Обуховского, С.В. Корнева, A. Fonda, L. Gorniewicz'a, J. Mawhin'a и других. Однако до сих пор все развития этого метода касались лишь дифференциальных уравнений и включений в конечномерных пространствах.

Задача о существовании ветви нетривиальных решений операторных уравнений, выходящей из точки бифуркации была изучена М.А. Красносельским[1]. Теорема о глобальной структуре множества решений операторных уравнений была доказана в работе P.H. Rabinowitz'a[2]. Отметим, что в дальнейшем топологические методы в теории бифуркаций применяли в своих работах также Н.А. Бобылев, Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, М.И. Каменский, А.М. Красносельский, Ю.И. Сапронов, E. Dancer, J. Marsden, L. Gorniewicz, W. Kryszewski и многие другие исследователи. Результаты М.А. Красносельского и P.H. Rabinowitz'a были обобщены в работе J.C. Alexander'a и P.M. Fitzpatrick'a[3] для включений. Отметим, что основная трудность в этой задаче возникает при вычислении бифуркационного индекса.

В диссертации исследуются приложения метода направляющих функций к вычислению бифуркационного индекса и распространение метода направляющих функций на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Цель работы. Применения метода направляющих функций для изучения глобальной структуры множества периодических решений дифференциальных включений, функционально-дифференциальных включений и распространение этого метода для изучения дифференциальных включений в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, теории многозначных отображений и теории бифуркаций.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Изучена взаимосвязь между бифуркационным индексом и индексом соответствующей направляющей функции.

2. Получены результаты о глобальной структуре множества периодических решений дифференциальных включений.

3 Получен результат о глобальной структуре множества периодических решений функционально-дифференциальных включений.

4. Распространен метод направляющих функций на дифференциальные включения в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

5. Описана глобальная структура множества решений включений, содержащих линейные фредгольмовы операторы нулевого индекса и выпуклозначные

[1]Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гос. изд. технико-теоретической литературы. М., 1956.

[2]Rabinowitz P. Some global results for nonlinear eigenvalue problems // J. Funct. Anal. 7(1971), 487-513

[3]Alexander J.C. and Fitzpatrick P.M. Global bifurcation for solutions of equations involving several parameter multivalued condensing mappings // Lect. Notes Math. 886 (1981), 1-19

мультиотображения.

Практическая и теоретическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории бифуркаций, теории дифференциальных уравнений, теории управляемых систем. Они могут также найти приложения в задачах математической экономики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология"(Москва, 2008г.), III международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования"(Воронеж 2009г.), международной научной конференции "Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2009г.), на Воронежской зимней математической школе им. С.Г. Крейна 2010г., научной конференции студентов физико-математического факультета ВГПУ (2009г. и 2010г.), а также на научном семинаре профессора В.В. Обуховского (ВГУ, 2008г.-2010г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[8]. Из совместных работ [4], [5] и [8] в диссертацию вошли только результаты, полученные лично диссертантом. Работы [4], [5], [7] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 90 страницах и состоит из введения, четырех глав, разбитых в общей сложности на 11 параграфов, и списка цитируемой литературы, включающего 39 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Пусть X - банахово пространство; $P(X)$ $[Cv(X),\ Kv(X)]$ обозначает совокупность непустых [соответственно: непустых выпуклых замкнутых, непустых выпуклых компактных] подмножеств X. Символами $C([0,T],X)$ $[L^p([0,T],X)]$ обозначаются пространство всех непрерывных [соответсвенно: $p-$суммируемых] функций на $[0,T]$ со значениями в X, $p \geq 1$. Обозначим через $W^{k,p}([0,T],X)$ пространство Соболева с нормой

$$\|x\|_W = \|x\|_p + \|x'\|_p + \cdots + \|x^{(k)}\|_p.$$

Пусть $W_T^{k,p}([0,T],X)$ $[C_T([0,T],X)]$ - подпространство всех функций $x \in W^{k,p}([0,T],X)$ [соответственно, $x \in C([0,T],X)$] таких, что $x(0) = x(T)$. Шар радиуса r в X обозначается символом $B_X(0,r)$.

Нумерация определений и теорем в автореферате не совпадает с их нумерацией в диссертации.

Первая глава носит вспомогательный характер и посвящена изложению необходимых понятий и утверждений функционального анализа, теории многозначных отображений и теории бифуркаций.

Вторая глава состоит из двух параграфов. **В первом параграфе** рассматривается семейство дифференциальных включний

$$x'(t) \in F(t, x(t), \mu), \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R}; \ \mu \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Предположим, что мультиотображение $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

(F_T) мультифункция $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ $T-$периодична по первому аргументу, т.е.,

$$F(t, y, \mu) = F(t + T, y, \mu)$$

для п.в. $t \in \mathbb{R}$ и любого $(y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;

$(F1)$ для каждого $(y, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ мультифункция $F(\cdot, y, \mu)\colon [0, T] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение;

$(F2)$ для $t = 0$ и п.в. $t \in (0, T]$ мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ существует такая неотрицательная функция $h_\Omega \in L^p([0, T], \mathbb{R})$, что

$$\|F(t, y, \mu)\|_{\mathbb{R}^n} \leq h_\Omega(t)$$

для всех $(y, \mu) \in \Omega$ и п.в. $t \in [0, T]$, где

$$\|F(t, y, \mu)\|_{\mathbb{R}^n} = \max\{\|z\|_{\mathbb{R}^n} \colon z \in F(t, y, \mu)\};$$

$(F4)$ $0 \in F(s, 0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и п.в. $s \in [0, T]$;

$(F5)$ существует $r_0 > 0$ такое, что для каждого $\kappa > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что

$$h(F(t, y, \mu), F(t, y, \mu')) < \kappa$$

для всех (y, μ), $(y, \mu') \in B_{\mathbb{R}^n}(0, r_0) \times [\mu_0 - r_0, \mu_0 + r_0]$, $|\mu - \mu'| < \eta$ и п.в. $t \in [0, T]$, где $\mu_0 \in \mathbb{R}$ - заданное число, h - метрика Хаусдорфа в $Kv(\mathbb{R}^n)$;

$(F6)$ для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leq r_0$, где r_0 - константа в $(F5)$, существует достаточно малое $\varepsilon_\mu > 0$ такое, что если (x, μ) является нетривиальным решением семейства (1) с начальным условием $x(0) = 0$, то $\|x\|_C \geq \varepsilon_\mu$.

Из $(F1) - (F3)$ следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F\colon C([0,T],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to Cv(L^p([0,T],\mathbb{R}^n)),$$
$$\mathcal{P}_F(x,\mu) = \big\{ f \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n)\colon f(s) \in F(s, x(s), \mu) \text{ п.в. } s \in [0,T] \big\},$$

корректно определен и замкнут. Под $T-$периодическим решением семейства (1) будем понимать пару $(x, \mu) \in W_T^{1,p}([0,T],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1). Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных $T-$периодических решений семейства (1). Опишем глобальную структуру множества $\mathcal{S}$ при двух случаях значения p, где p - константа в $(F3)$.

При $p = 1$:

Определение 1. *При каждом $\mu \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемая функция $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется направляющей функцией для включения (1), если существует достаточно малое $\tau_\mu > 0$ такое, что для любого $y \in F(t,x,\mu)$:*

$$\begin{cases} \big\langle \nabla V_\mu(x), y \big\rangle > 0 \text{ при } t = 0 \ \text{ и п.в. } t \in (0,\tau_\mu), \ 0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \tau_\mu, \\ \big\langle \nabla V_\mu(x), y \big\rangle \geq 0 \text{ при п.в. } t \in [\tau_\mu, T], \end{cases}$$

где $\big\langle , \big\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Из данного определения следует, что если V_μ - направляющая функция включения (1), то V_μ является невырожденным потенциалом, т.е. существует достаточно малое $r_\mu > 0$ такое, что градиент $\nabla V_\mu(x) \neq 0$ при $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq r_\mu$. Из свойств топологической степени вытекает, что степень невырожденного потенциала $deg(\nabla V_\mu, B_{\mathbb{R}^n}(0, r'))$, не зависит от $r' \in (0, r_\mu)$. Это общее значение степени называется *индексом невырожденного потенциала* и обозначается $ind\, V_\mu$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $(F1) - (F6)$ и (F_T). Предположим, что для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \leq r_0$, где r_0 - коэффициент в $(F5)$, существует направляющая функция V_μ для включения (1) такая, что*

$$\lim_{\mu \to \mu_0^+} ind\, V_\mu - \lim_{\mu \to \mu_0^-} ind\, V_\mu \neq 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ такое, что $(0, \mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ и либо $\mathcal{R}$ неограничено, либо $(0, \mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ для некоторого $\mu_* \neq \mu_0$.

При $p = 2$:

Пусть мультиотображение F удовлетворяет условиям (F_T), $(F1)$ и $(F3)-(F5)$. Дополнительно предположим, что

$(F2)'$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху.

Определение 2. *При каждом $\mu \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемая функция $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для включения (1), если существует достаточно малое $\pi_\mu > 0$ такое, что для любого $x \in W_T^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n)$ из*

$$0 < \|x\|_2 \le \pi_\mu \text{ и}$$

$$\|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le \|F(t,x(t),\mu)\|_{\mathbb{R}^n} \text{ для п.в. } t \in [0,T]$$

следует

$$\int_0^T \big\langle \nabla V_\mu(x(s)), f(s) \big\rangle\, ds > 0$$

для всех $f \in \mathcal{P}_F(x,\mu)$ таких, что $\|f\|_2 \ge \|x'\|_2$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $(F1)$, $(F2)'$, $(F3)-(F5)$ и (F_T). Предположим, что для каждого μ, $0 < |\mu - \mu_0| \le r_0$, где r_0 - коэффициент в $(F5)$, существует интегральная направляющая функция V_μ для включения (1) такая, что*

$$\lim_{\mu \to \mu_0^+} ind\, V_\mu - \lim_{\mu \to \mu_0^-} ind\, V_\mu \ne 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ такое, что $(0,\mu_0) \in \overline{\mathcal{R}}$ и либо $\mathcal{R}$ неограничено, либо $(0,\mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ для некоторого $\mu_* \ne \mu_0$.

Во втором параграфе рассматривается семейство функционально - дифференциальных включений

$$x'(t) \in G(t,x_t,\mu), \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R};\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Здесь для каждой функции $x \in C([-\tau,T],\mathbb{R}^n)$ и каждого $t \in [0,T]$, символ $x_t \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ обозначает функцию, определенную следующим образом: $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$.

Предположим, что мультиотображение

$$G\colon \mathbb{R} \times C([-\tau,0],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$$

удовлетворяет следующим условиям:

(G_T) G является T-периодическим по первому аргументу

$$G(t, \varphi, \mu) = G(t + T, \varphi, \mu)$$

для всех $(\varphi, \mu) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ и п.в. $t \in \mathbb{R}$;

$(G1)$ мультифункция $G(\cdot, \varphi, \mu) \colon [0, T] \to Kv(\mathbb{R}^n)$ имеет измеримое сечение для каждого $(\varphi, \mu) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$;

$(G2)$ мультиотображение $G(t, \cdot, \cdot) \colon C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t \in [0, T]$;

$(G3)$ для каждого ограниченного множества $\Omega \subset C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ существует неотрицательная функция $k_\Omega \in L^2([0, T], \mathbb{R})$ такая, что

$$\|G(t, \varphi, \mu)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k_\Omega(t)$$

для всех $(\varphi, \mu) \in \Omega$ и п.в. $t \in [0, T]$;

$(G4)$ $0 \in G(t, 0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0, T]$.

$(G5)$ существуют $\mu_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\kappa > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$h(G(t, \varphi, \mu), G(t, \varphi, \mu')) < \kappa, \text{ для п.в. } t \in [0, T],$$

при (φ, μ), $(\varphi, \mu') \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ таких, что

$$\|\varphi\|_{C_{[-\tau,0]}} = \max_{[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon_0,$$

$$\mu, \mu' \in [\mu_0 - \varepsilon_0, \mu_0 + \varepsilon_0], \quad |\mu - \mu'| < \delta.$$

При выполнении условий $(G1) - (G3)$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_G \colon C_T([0, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to Cv(L^2([0, T], \mathbb{R}^n)),$$
$$\mathcal{P}_G(x, \mu) = \{f \in L^2([0, T], \mathbb{R}^n) \colon f(s) \in G(s, \widetilde{x}_s, \mu) \text{ для п.в. } s \in [0, T]\},$$

корректно определен и замкнут, где $\widetilde{x}$ обозначает $T-$периодическое расширение функции $x \in C_T([0, T], \mathbb{R}^n)$ на $(-\infty, T]$.

Под $T-$периодическим решением семейства (2) будем понимать пару $(x, \mu) \in W_T^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ такая, что найдется функция $f \in \mathcal{P}_G(x, \mu)$ и $x'(t) = f(t)$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - локально липшицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная $V^0(x_0;\nu)$ функции V в точке x_0 по направлению ν определяется следующим образом

$$V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}}} \ \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t}.$$

Тогда обобщенный градиент $\partial V(x_0)$ функции V в точке x_0 может быть определен как:

$$\partial V(x_0) = \left\{ x \in R^n \colon \left\langle x, \nu \right\rangle \leq V^0(x_0;\nu) \ \textit{для любого} \ \ \nu \in R^n \right\}.$$

Известно, что мультиотображение $\partial V\colon \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху и имеет выпуклые компактные значения. Это означает, что для каждой непрерывной функции $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ множество всех суммируемых со второй степенью сечений мультифункции $\partial V(x(t))$ непусто.

Локально липшицева функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждых $x \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x,\nu)$ и $V'(x,\nu) = V^0(x,\nu)$.

Определение 3. *Регулярная функция $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $r > 0$ такое, что $0 \notin \partial V(x)$ при*

$$0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq r.$$

Нетрудно видеть, что если V - невырожденный потенциал, то топологическая степень $deg(\partial V, B_{\mathbb{R}^n}(0,r'))$, где $0 < r' < r$, корректно определена и не зависит от r'. Мы также обозначаем эту степень символом $ind\, V$.

Определение 4. *Для каждого $\mu \in \mathbb{R}$, регулярная функция $V_\mu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется негладкой интегральной направляющей функцией для включения (2), если существует $\delta_\mu > 0$ такое, что для любой функции $x \in W_T^{1,2}([0,T],\mathbb{R}^n)$, $0 < \|x\|_2 \leq \delta_\mu$ и $\|x'(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|G(t,\widetilde{x}_t,\mu)\|_{\mathbb{R}^n}$ для п.в. $t \in [0,T]$ выполнено следующее соотношение*

$$\int_0^T \left\langle v(s), f(s) \right\rangle ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $v(s) \in \partial V_\mu(x(s))$ и всех $f \in \mathcal{P}_G(x,\mu)$ таких, что $\|f\|_2 \geq \|x'\|_2$.

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных $T-$периодических решений семейства (2).

Теорема 3. *Пусть выполнены* $(G1)-(G5)$ *и* (G_T). *Предположим, что для каждого* μ, $0<|\mu-\mu_0|\leq\varepsilon_0$, *где* μ_0,ε_0 *- коэффициенты в* $(G5)$, *существует негладкая интегральная направляющая функция* V_μ *для включения* (2) *такая, что*

$$\lim_{\mu\to\mu_0^+} ind\, V_\mu - \lim_{\mu\to\mu_0^-} ind\, V_\mu \neq 0.$$

Тогда существует связное множество $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}$ *такое, что* $(0,\mu_0)\in\overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0,\mu_*)\in\overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_*\neq\mu_0$.

В третьей главе предлагается новый подход к распространению метода направляющих функций на бесконечномерное гильбертово пространство. Пусть H - гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$, пусть H_n - $n-$мерное подпространство H с базисом $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ и P_n - проекция на H_n. Для любых $x,y\in H$, через $\langle x,y\rangle_H$ обозначим их скалярное произведение в H.

Определение 5. *Пусть* $\mathcal{A}\colon W_T^{1,2}(I,H)\to L^2(I,H)$ *- некоторый линейный оператор. Мультиотображение* $\mathcal{F}\colon C(I,H)\to P(L^2(I,H))$ *называется* $\mathcal{A}-$*разрешимым, если из существования последовательностей* $\{n_k\}$ *и* $\{x_k\}$, $x_k\in W_T^{1,2}(I,H_{n_k})$ *таких, что* $\sup_k\|x_k\|_C<+\infty$ *и* $\mathcal{A}x_k\in P_{n_k}\mathcal{F}(x_k)$ *следует, что найдется такое* $x_*\in W_T^{1,2}(I,H)$, *что* $\mathcal{A}x_*\in\mathcal{F}(x_*)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$x'(t)\in F(t,x(t)),\ \text{для п.в. } t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Предположим, что мультиотображение $F\colon\mathbb{R}\times H\to Kv(H)$ удовлетворяет следующим условиям:

(F_T) мультифункция $F\colon\mathbb{R}\times H\to Kv(H)$ $T-$периодична по первому аргументу, т.е.,

$$F(t,y)=F(t+T,y)\ \text{для п.в. } t\in\mathbb{R},\ \text{и любого } y\in H;$$

$(F1)$ для каждого $y\in H$ мультифункция $F(\cdot,y)\colon[0,T]\to Kv(H)$ имеет измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t\in[0,T]$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H\to Kv(H)$ полунепрерывно сверху;

$(F3)$ существует неотрицательная функция $\varphi \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ такая, что

$$\|F(t,y)\|_H \leq \varphi(t)(1+\|y\|_H),$$

для всех $y \in H$ и п.в. $t \in [0,T]$.

Назовем $T-$периодическим решением включения (3) такую функцию $x \in W_T^{1,2}(I,H)$, которая удовлетворяет (3). Заменим включение (3) включением

$$Ax \in \mathcal{P}_F(x),$$

где $A\colon W_T^{1,2}(I,H) \to L^2(I,H)$, $Ax = x'$, и $\mathcal{P}_F\colon C(I,H) \to Cv(L^2(I,H))$ является мультиоператором суперпозиции.

Непрерывно дифференцируемый функционал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если существует $r_0 > 0$ такое, что градиент $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \cdots\right)$ не обращается в нуль при всех $\|x\|_H \geq r_0$, где $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in H$.

Определение 6. *Непрерывно дифференцируемый функционал V называется проекционно-однородным потенциалом, если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что*

$$P_n \nabla V(x) = \nabla V(P_n x)$$

для любого $n \geq n_0$ и любых $x \in H$.

Из Определения 6 следует, что если V - невырожденный проекционно-однородный потенциал, то поле

$$P_n\nabla V\colon H \to H_n,$$
$$P_n\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}, 0, 0, \cdots\right),$$
$$x = (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \in H,$$

не обращается в нуль на границе $\partial B_H^{(n)}(0,r) = \partial B_H(0,r) \cap H_n$ для всех $n \geq n_0$ и $r \geq r_0$. Тогда топологическая степень

$$v_n = deg(P_n\nabla V, B_H^{(n)}(0,r)),\ n \geq n_0,$$

корректно определена и не зависит от $r \geq r_0$.

Индекс невырожденного проекционно-однородного потенциала V определяется следующим образом

$$ind\, V = (v_{n_0}, v_{n_0+1}, \cdots).$$

Под $ind V \neq 0$ понимаем, что существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $v_{n_k} \neq 0$ для всех n_k.

Определение 7. *Проекционно-однородный потенциал $V\colon H \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией для включения (3), если существует достаточно большое $N > 0$ такое, что для любого $x \in W_T^{1,2}(I,H)$ из*

$$\|x\|_2 \geq N,\ \|x'(s)\|_H \leq \|F(s,x(s))\|_H \text{ для п.в. } s \in I$$

следует

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\, sign\left(\int_0^T \big\langle P_n \nabla V(x(s)), f(s)\big\rangle_H\, ds\right) = 1$$

для тех $f \in \mathcal{P}_F(x)$ таких, что $\|f\|_2 \geq \|x'\|_2$.

Если V является интегральной направляющей функцией для включения (3), то V является невырожденным потенциалом и определен его индекс.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия $(F1)-(F3)$ и (F_T). Предположим, что существует интегральная направляющая функция V для включения (3) такая, что $ind V \neq 0$. Тогда если мультиоператор $\mathcal{P}_F$ обладает свойством $A-$разрешимости, то включение (3) имеет $T-$периодическое решение.*

Следующие утверждения показывают некоторые достаточные условия $A-$разрешимости мультиоператора $\mathcal{P}_F$.

Теорема 5. *Пусть гильбертово пространство H компактно вложено в банахово пространство Y. Предположим, что мультиотображение $\widetilde{F}\colon I \times Y \to P(Y)$ удовлетворяет условию:*

- $(\widetilde{F})$ *для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $\widetilde{F}(t,\cdot)\colon Y \to P(Y)$ полунепрерывно сверху.*

Дополнительно предположим, что сужение $\widetilde{F}_{|_{I\times H}}$ принимает значения в $Kv(H)$ и мультиотображение $F = \widetilde{F}_{|_{I\times H}}\colon I \times H \to Kv(H)$ удовлетворяет условиям $(F1),(F3)$. Тогда мультиоператор $\mathcal{P}_F$ обладает свойством $A-$разрешимости.

Теорема 6. *Пусть мультиотображение $F\colon I \times H \to Kv(H)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ и $(F3)$. Тогда мультиоператор $\mathcal{P}_F$ обладает свойством $A-$разрешимости при выполнении каждого из следующих условий:*

- $(1i)$ *для п.в. $t \in I$ мультиотображение $F(t,\cdot)\colon H \to Kv(H)$ слабо полунепрерывно сверху в том смысле, что: если $x_n \xrightarrow{H} x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon,t) > 0$, что $F(t,x_n) \subset O_\varepsilon\big(F(t,x_0)\big)$ для всех $n > N(\varepsilon,t)$;*

(2i) *мультиотображение F удовлеторяет условию ($F2$) и существует $q_0 > 0$ такое, что для каждого $n \geq q_0$ сужение мультиотображения $F(t, \cdot)$ на H_n принимает значения в $Kv(H_n)$ для п.в. $t \in I$.*

Пусть Ω - окрытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей; через $W_\circ^{k,p}(\Omega)$ мы обозначим подпространство всех функций из $W^{k,p}(\Omega)$, которые обращаются в нуль на $\partial\Omega$.

В последней главе изучается глобальная структура множества решений следующего семейства включений

$$Au + g(u, \mu) \in \Phi(u, \mu),\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

при следующих предположениях[4]:

($A1$) $A\colon domA := W^{2,p}(\Omega) \cap W_\circ^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ является линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса и $p \geq 2$ и $2p > n$;

($A2$) A самосопряжен в том смысле, что

$$< Au, v >_L = < v, Au >_L$$

для всех $u, v \in domA$, где $< u, v >_L = \int_\Omega uvdx$;

($A3$) $dimKerA = 1$ и $\omega \in domA$, $\|\omega\|_p = 1$, является базисным элементом $KerA$;

(g1) отображение $g\colon C(\Omega) \times \mathbb{R} \to L^p(\Omega)$ непрерывно и ограничено на ограниченных множествах и $g(0, \mu) = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$;

(g2) существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\kappa > 0$ найдется такое $\delta_\kappa^{(1)} > 0$, что

$$\|g(u, \mu) - g(u, \mu')\|_p < \kappa$$

при $|\mu - \mu'| < \delta_\kappa^{(1)}$ и $(u, \mu), (u, \mu') \in B_C(0, \varepsilon_0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$;

($\Phi1$) мультиоператор $\Phi\colon C(\Omega) \times \mathbb{R} \to Cv(L^p(\Omega))$ полунепрерывно сверху и ограничен на ограниченных множествах и $0 \in \Phi(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$;

[4]Obukhovskii V., Zecca P. and Zvyagin V. On some generalizations of the Landesman-Lazer theorem // Fixed Point Theory, 8(2007), no. 1, 69-85.

(Φ2) для любого $\kappa > 0$ существует $\delta_\kappa^{(2)} > 0$ такое, что

$$h(\Phi(u,\mu), \Phi(u,\mu')) < \kappa$$

при $|\mu - \mu'| < \delta_\kappa^{(2)}$ и $(u,\mu), (u,\mu') \in B_C(0,\varepsilon_0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, где ε_0 - константа из $(g2)$.

Пара $(u,\mu) \in domA \times \mathbb{R}$ называется решением семейства (4), если существует функция $f \in \Phi(u,\mu)$ такая, что

$$Au + g(u,\mu) = f.$$

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех нетривиальных решений семейства (4).

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* $(A1)-(A3)$, $(g1)-(g2)$ *и* $(\Phi1)-(\Phi2)$. *Дополнительно предположим, что*

$(g3)$ *существуют* $\beta > 0$ *и функция* $h\colon [-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0] \to (0, +\infty)$ *такие, что*

$$| < g(u,\mu), \omega >_L | \geq h(\mu) \|u\|_2^\beta,$$

при $(u,\mu) \in B_C(0,\varepsilon_0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\mu \neq 0$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ *- константа из* $(g2)$ *и* $(\Phi2)$;

$(g4)$ *если* $a \neq 0$, $\mu \neq 0$ *и значение* $|a\mu|$ *достаточно мало, то*

$$a\mu < g(a\omega,\mu), \omega >_L > \ 0;$$

(Φ3) *существуют* $c > 0$ *и* $\alpha > \beta$ *такие, что*

$$\|\Phi(u,\mu)\|_2 \leq c\ \|u\|_2^\alpha,$$

при $(u,\mu) \in B_C(0,\varepsilon_0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $\mu \neq 0$, *где*

$$\|\Phi(u,\mu)\|_2 = \sup\{\|f\|_2 \colon f \in \Phi(u,\mu)\}.$$

Тогда существует связное подмножество $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ *такое, что* $(0,0) \in \overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *неограничено, либо* $(0,\mu_*) \in \overline{\mathcal{R}}$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

Автор глубоко признателен профессору Обуховскому В.В. за научное руководство и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Нгуен Ван Лой. Интегральные включения типа Гаммерштейна в банаховом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения и топология. Тезисы докладов. – Москва. – 2009. – С. 155.

[2] Нгуен Ван Лой. Глобальная бифуркация положительных решений уравнений, содержащих линейные фредгольмовы операторы и разрывные нелинейности / Нгуен Ван Лой // Современные проблемы прикладной математики и математического моделировния. Материалы III международной научной конференции. – Часть 2. – Воронеж: "Научная книга".– 2009. – С. 155-156.

[3] Нгуен Ван Лой. О применении метода интегральных направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой // Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2009. – Т. 14, вып. 4. – С. 738-740.

[4] Nguyen Van Loi. On the global bifurcation for solutions of linear fredholm inclusions with convex-valued perturbations / Nguyen Van Loi and Valeri Obukhovskii // Fixed Point Theory. – 2009. – Vol. 10. – No. 2. – P. 289-303.

[5] Нгуен Ван Лой. О применении метода направляющих функций к задаче о бифуркации периодических решений дифференциальных включений / Нгуен Ван Лой, В.В. Обуховский // Вестник РУДН. Сер. Математика, Информатика, Физика. – 2009. – №. 4. – С. 14-24.

[6] Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2010. Тезисы докладов. – Воронеж: ВорГУ. – 2010. – С. 108.

[7] Нгуен Ван Лой. Метод направляющих функций для дифференциальных включений в гильбертовом пространстве / Нгуен Ван Лой // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – №10. – С. 1433-1443.

[8] Nguyen Van Loi. On global bifurcation of periodic solutions for functional differential inclusions / Nguyen Van Loi and Valeri Obukhovskii // Functional Differential Equat. – 2010. – Vol. 17. – No. 1-2. – P. 161-172.

Работы [4], [5], [7] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ.

Подписано в печать 09.11.2010 г. Формат 60x84^1/16. Печать трафаретная.
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. л. 1. Уч.-изд. л. 0,93. Заказ 228. Тираж 100 экз.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Воронежский государственный педагогический университет".
Отпечатано с готового оригинала-макета в типографии университета.
394043 г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (4732) 55-58-32, 55-61-83.